03. 04. 2006թ.

Տարբերակ 1

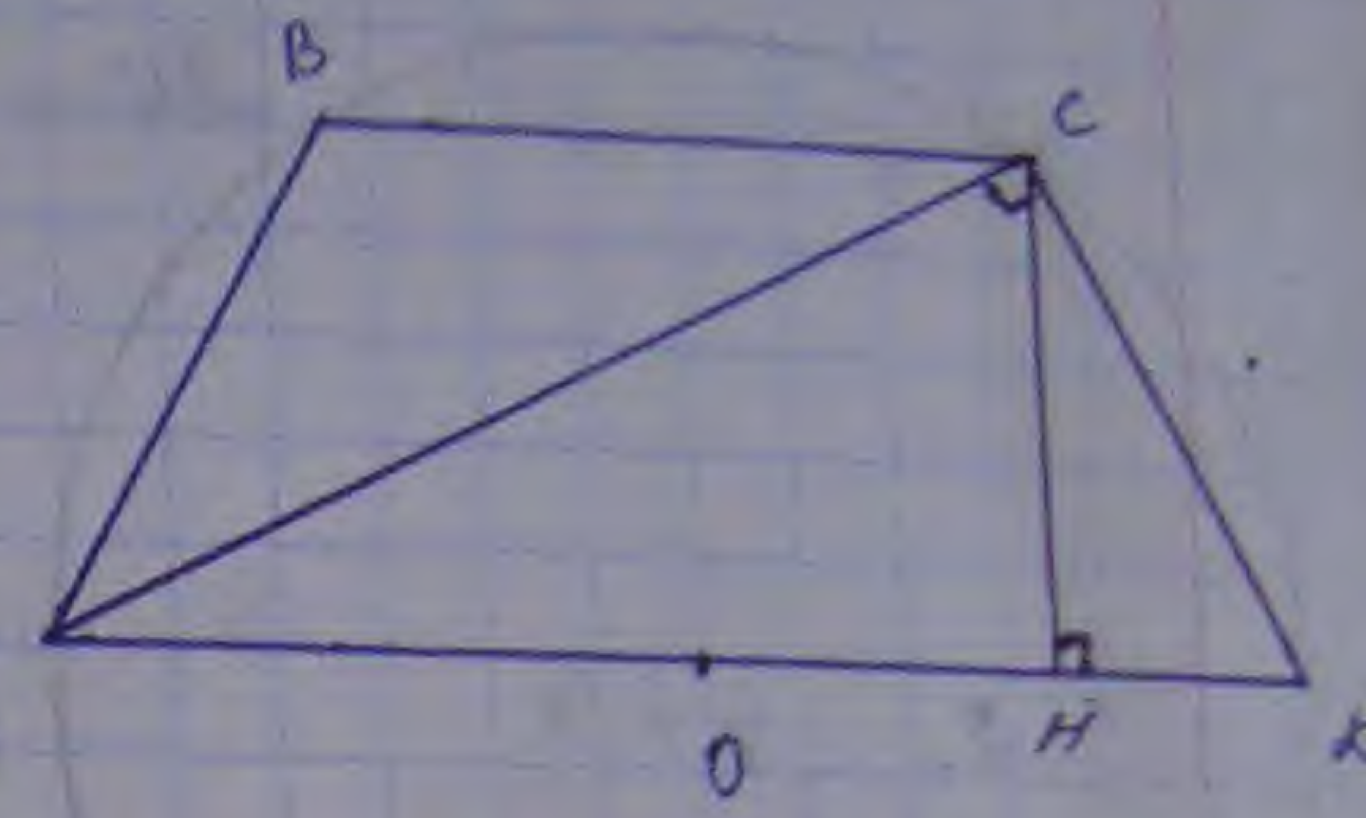
1. $AD \parallel BC$; $AB \nparallel CD$

$AB = CD$.

$BC = 12$

$AD = 20$.

$AC - ?$



ACD ներգծյալ անկյունը հենված է O կենտրոնով շրջանագծի տրամագծի վրա, ուստի՝ $\angle ACD = 90°$։

ACD ուղ. ~~եռ-ի~~ անկ-ի C գագաթից AD կողմին տարված CH բարձրությունը որը H կետում կիսում AD կողմը տրո-հում է AH և HD, հատվածների, որտեղ

$AH = \frac{AD + BC}{2} = 16$ և $HD = \frac{AD - BC}{2} = 4$։

Բայց որ ուղ. եռ-ի ~~ուղիղ~~ ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը համեմատական միջին է ներքնաձիգի վրա առաջացած հատվածների, ապա

$CH = \sqrt{4 \cdot 16} = 8$։

Նկատելով, որ $AH = 16$ և $CH = 8$, ACH ուղղանկ-

որը եռանկյունից կարողանանք AC ներքնաձիգը,
որը ABCD սեղանի հանգ կամենում և
անկյունագիծ. $AC = \sqrt{16^2 + 8^2} = \sqrt{256 + 64} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$.

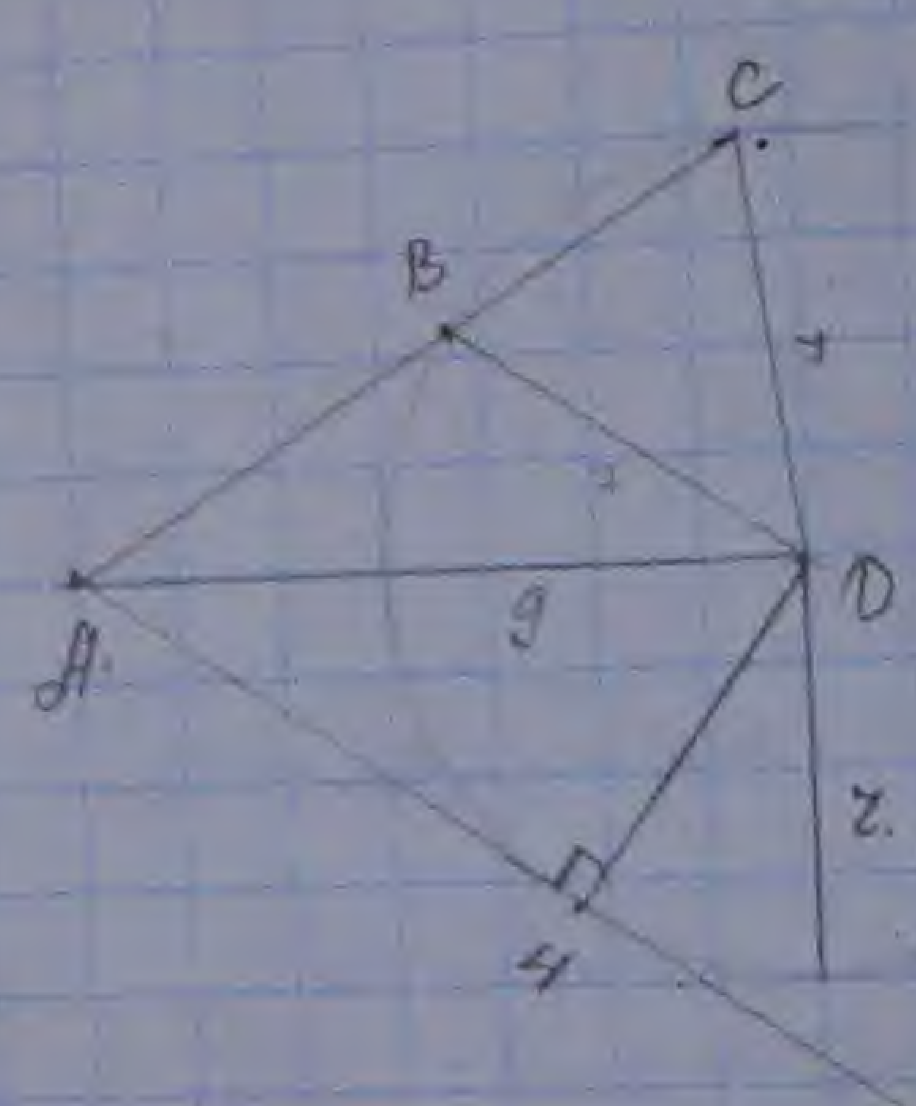
Պատ՝ $8\sqrt{5}$:

2. $r = 7$

$OA = 9$

$AB = BC$.

AC - ?



A կետից O կենտրոնով շրջանագծին տանենք AH շոշափողը: Շոշափման H կետը միացնենք շրջանագծի կենտրոնին: $AH \perp OH$ (որպես շոշափողի հատկություն): Դիտարկենք AOH ուղ. եռ.-ն, որտեղ $OH = r = 7$; $AO = 9 \Rightarrow AH = \sqrt{81 - 49} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$:

Քանի որ եթե մի կետից տարված են շոշափող և հատող, ապա շոշափողը համեմատական միջին է այդ հատողի և նրա արտաքին մասի, հետևի $AH^2 = AC \cdot BC$

Ուրեմն $AC = 2 \cdot BC$

Բայց $AH^2 = 2 \cdot BC \cdot BC = 2BC^2$, որտեղից $AH = BC\sqrt{2}$:

Այսպիսով $BC = \frac{AH}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4.$

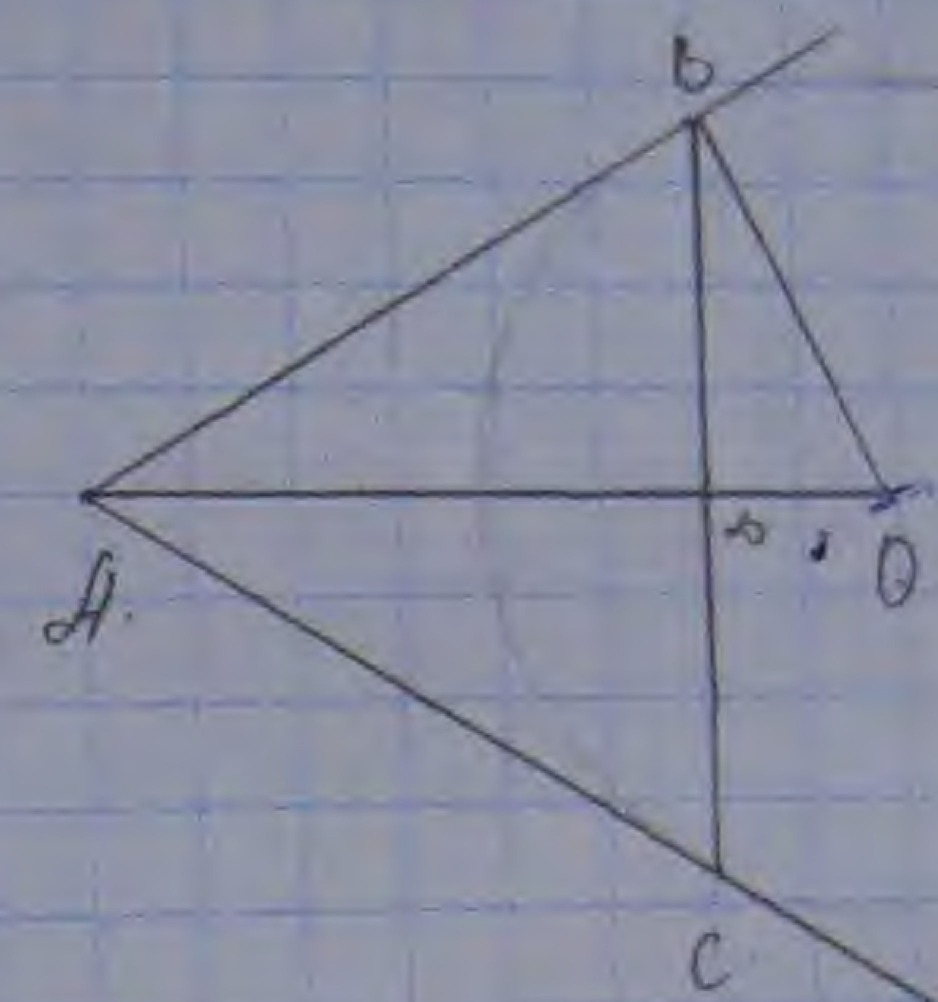
$AC = 2BC \Rightarrow AC = 8$:

Պատ՝ 8.

3. $AB = AC = 10.$

$BC = 6$

$d - ?$



$AO \perp BC$ (ըստ հավասարասրուն եռանկյան միջնագծի հատկության): Դիտարկենք ABD եռ-ը, որտեղ $BD = DC = 3$, $AB = 10$ (ըստ պայմանի): Այսպիսով Պյութ. թեոր. գտնենք AD-ն՝ $AD = \sqrt{91}$

$OB \perp AB$ (ըստ շոշափողի հատկության) $\Rightarrow$

ABO ուղ. եռ. մեջ BD-ն բարձրություն է, ապա $BD^2 = AD \cdot OD$, որտեղից $OD =$

$= \frac{BD^2}{AD} = \frac{9}{\sqrt{91}}$:

OBD ուղ. եռ մեջ՝ $OD = \frac{9\sqrt{91}}{91}$, $BD = 3 \Rightarrow$

$$BO = \sqrt{\frac{81}{91} + 9} = \sqrt{\frac{900}{91}} = \frac{30}{\sqrt{91}} = \frac{30\sqrt{91}}{91}$$

Պատ՝ $\frac{30\sqrt{91}}{91}$.


DAN-MARK
Nature

Ամսը

Երկրաչափության գր աշխատանքների համար

ՈրՃԸԴՀ-ի $\overline{IX}^2$ դասարանի աշակերտուհի

Դալարյան Գոհինե Վարդանի

13.03.2006թ.

Շրջանային - 11րդ դասարան

Խնդիր 1

Տրված է O կենտրոնով շրջ.-ին ABC-ն ներգծված, իսկ DEF-ը արտագծված է այդ շրջ.-ին

(Գիտենք՝ $AB = BC = AC$

$DE = EF = FD$)

Շրջ.-ի շառավիղը r է։

Գտնել $\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}$-ը

ABC և DEF կանոնավոր եռանկյունների մակերեսները արտահայտենք r-ով։ Դրա համար գտնենք այդ եռանկյունների կողմերը՝ արտահայտված r-ով։

O կենտրոնով շրջանագիծը A, B և C կետերով բաժանված է 3 հավասար աղեղների, որոնցից յուրաքանչյուրի աստիճանային չափը՝ $\cup BC = \cup AC = \cup AB = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ և որ դրանց վրա հենված կենտրոնային անկյունները նույնպես 120°-ի են՝

$\angle BOC = \angle BOA = \angle AOC = 120^\circ$։ Կոսինուսների թեորեմից կարող ենք գտնել $AB = BC = AC$ կողմի երկարությունը՝ r-ով

արտահայտման՝ $BC=\sqrt{2r^2-2r^2\cos 120^\circ}=2r$ ։ Այստեղից

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin ABC$, քանի որ ABC եռ-ը կանոնավոր է, ապա նրա բոլոր անկյունները 60° են ⇒

⇒ $S_{ABC}=\frac{4r^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}r^2$

Գտնենք DEF եռ-ն կողմը՝ r-ով արտահայտած, տանելով OF O և F կետերը։ Դիտարկենք OFH ուղ. եռ-ը։ OF-ը F անկյան կիսորդն է, քանի որ $\angle F=60^\circ$, ապա OFH եռ-ն մեջ $\angle OFH=30^\circ$ ⇒ $OF=2OH$, քանի $OH=r$, ստացանք $OF=2r$։ Այստեղից գտնենք FH-ը։

$FH=\sqrt{OF^2-OH^2}=\sqrt{4r^2-r^2}=\sqrt{3}r$ ։ Բայց $EF=2FH=$
$=2\sqrt{3}r$ ⇒ $S_{EFD}=\frac{1}{2}EF^2\sin 60^\circ=\frac{4\cdot 3\cdot r^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}r^2$

Այսպիսով ստացանք, որ $S_{ABC}=\sqrt{3}r^2$, $S_{DEF}=3\sqrt{3}r^2$ ⇒
⇒ $\frac{S_{ABC}}{S_{EFD}}=\frac{\sqrt{3}r^2}{3\sqrt{3}r^2}=\frac{1}{3}$

Պատ՝ $\frac{1}{3}$,

Խնդիր 2

Տրված է ABC եռ-ը

$AB=BC=CA=a$

Գտնել $\frac{r}{R}$-ը

r և R շառավիղներով շրջանագծերի շառավիղները ABC կանոնավոր եռ-ի a կողմով արտահայտված։

Դիտարկենք OBC հավասարասրուն եռանկյունը, որի սրունքները R-ն են, իսկ հիմքը a, COB անկյունը 120°։

Այստեղից. $a^2 = 2R^2 - 2R^2\cos120^\circ = 3R^2$, որտեղից $R = \frac{\sqrt{3}a}{3}$

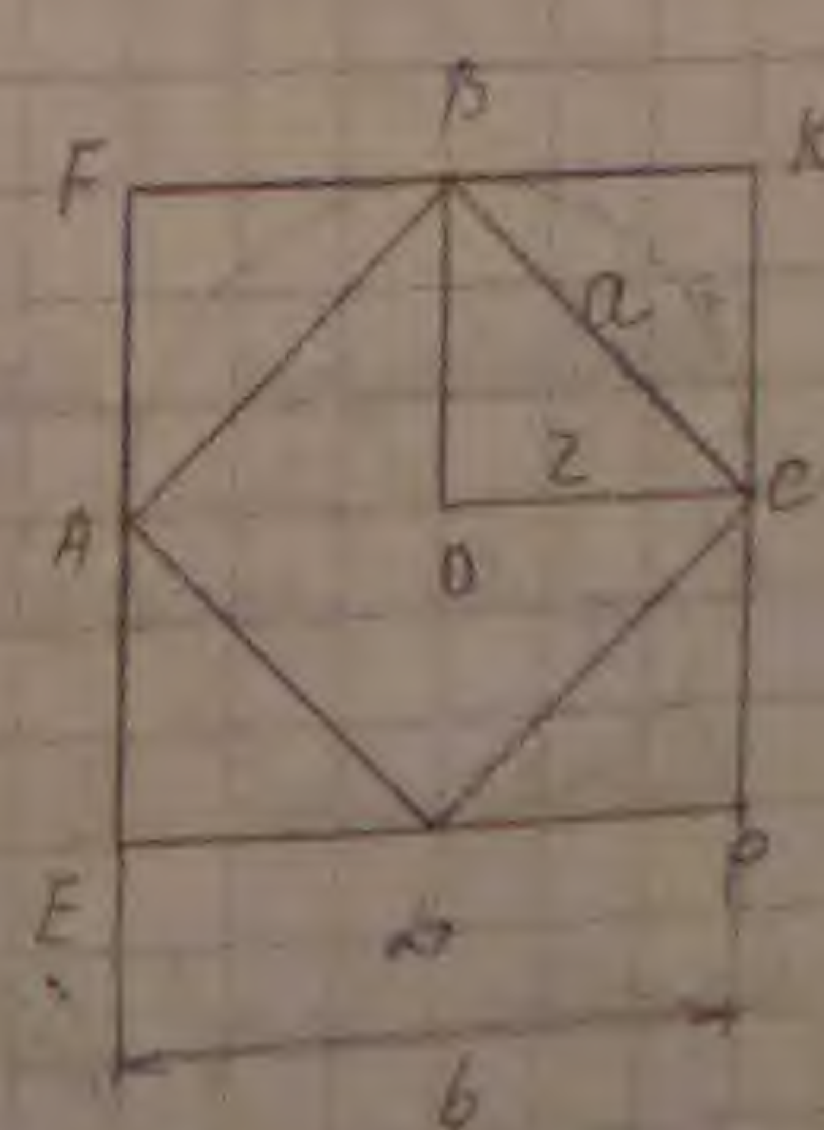
Այժմ դիտարկենք OCH ուղ. եռ.-ը, որտեղ $OC = R = \frac{\sqrt{3}a}{3}$, $CH = \frac{a}{2}$: Համաձայն Պյութագորասի թ-մի $OH^2 = OC^2 - CH^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{6}$

Այստեղից. $\frac{r}{R} = \frac{\cancel{\sqrt{3}a}}{\cancel{6}\,2} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{\sqrt{3}a}} = 0,5$

Պատ: 0,5

Խնդիր 3



Տրված է O կենտրոնով և r շառավղով շր. ABCD-ն ներգծված, իսկ EFKP-ն արտագծված քառակուսիներն են:

$AB = BC = CD = AD = a$

$EF = FK = KP = EP = b$

Գտնել $\frac{b}{a}$-ն

a և b կողմերը արտահայտենք r շառավղով:

EFKP քառակուսու KP կողմը // է BD տրամագծին, ուստի

և հակառակ կողմը, այսինքն՝ $b = 2r$:

Դիտարկենք BOC եռ-ը՝ ըստ Պյութագորասի թ-մի

$a = \sqrt{2}r$

Այսպիսով, ստացանք, որ $a = \sqrt{2}r$ և $b = 2r$, ապա

$$\frac{b}{a} = \frac{2r}{\sqrt{2}r} = \sqrt{2}$$

Պատ՝ $\sqrt{2}$

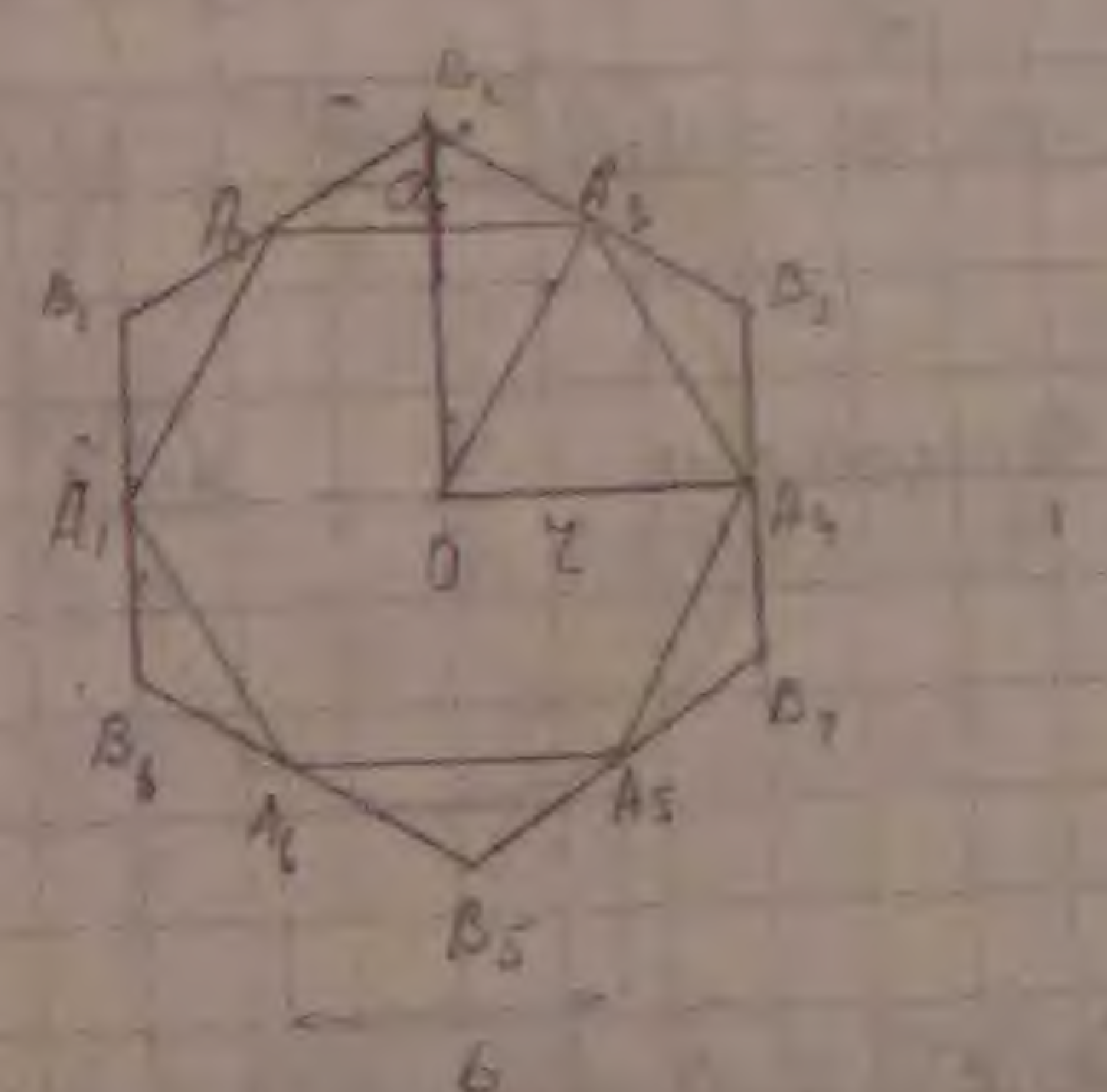
Խնդիր 4

$A_1A_2 \ldots A_6$-ը կանոնավոր է

$S_{A_1A_2 \ldots A_6} = S$

$B_1B_2 \ldots B_6$-ը կանոնավոր է

$S_{B_1B_2 \ldots B_6}$ - ?



Կանոնավոր բազմանկյան մակերեսը որոշվում է

$S' = \frac{1}{2}P \cdot r$ բանաձևով:

Կանոնավոր $A_1 \ldots A_6$ բազմանկյան կողմը՝ a և արտահայտենք r-ով: (Ըստ կոսինուսների թ-մի՝ $a = \sqrt{2r^2 - 2r^2}$)

Քանի որ $\angle A_3OA_4 = 60°$, և $OA_3 = OA_4 = r$, ապա $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OA_3A_4 = \angle OA_4A_3 = 60° \Rightarrow A_3A_4 = a = r$

Քանի որ $P = 6a = 6r$, ապա $S = 3r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{3}}$

b - կողմով վեցանկյան կողմը արդեն հայտնի է $b \cdot r$ -ով:

Դիտարկենք B_2OA_3 ուղղ. եռ.-ը: Քանի, որ $\angle B_2OA_3 = 30^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(2 \cdot \frac{b}{2} = r\right)$ $2 \cdot B_2A_3 = OB_2^2 \Rightarrow OB_2 = b$ ըստ Պյութ. թ-ի

$$b^2 - \frac{b^2}{4} = r^2 \Rightarrow b = \frac{2\sqrt{3}\,r}{3}$$

$$S_{b_6} = 6 \cdot S_{\triangle OB_2B_3} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot OB_2^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{34\,r^2}{9} =$$

$$= 2\sqrt{3}\,r^2 = \frac{2\sqrt{3}\,S}{3}$$

Խնդիր 5

$(S_{a_6} = 64)$

$S_{A_1A_2\ldots A_6} = 64$

$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_1A_6$

$\angle A_1 = \angle A_2 = \ldots = \angle A_6 = \frac{(n-2)\,180^\circ}{n} = \alpha$,

որտեղ $n = 6 \Rightarrow \alpha = 120^\circ$

Գտնել $S_{B_1B_2B_3\ldots B_n}$, որտեղ $A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2 = \ldots = A_1B_6$

Հեշտ ապացուցենք, որ $B_1B_2\ldots B_6$ բազմանկյունը, որ ներգծված է $A_1A_2\ldots A_6$ կանոնավոր բազմանկյանը, նույնպես կանոնավոր է:

Քանի որ $B_1, B_2\ldots B_6$ կետերը համապատասխանաբար $A_1A_2\ldots A_6$ կանոնավոր բազմանկյան $A_1A_2, A_2A_3\ldots A_6A_1$ կա-

կատար կողմերի միջնակետերն են, ապա $A_1B_1 = B_1A_2 =$
$= A_2B_2 = B_2A_3 = \ldots = A_6B_6 = B_6A_1$, իսկ $\angle A_1 = \angle A_2 = \ldots = \angle A_6$, որպես կանոնավոր վեցանկյան անկյուններ: Այս երկու հավասարություններից $\Rightarrow$ է, որ $\Delta A_1B_1B_6 = \Delta B_1A_2B_2 = \ldots = B_5A_6B_6 \Rightarrow$
$\Rightarrow B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots = B_6B_1$:

Քանի որ $B_1B_2\ldots B_6$ վեցանկյան գագաթները համընկնում են $A_1A_2\ldots A_6$ կանոնավոր վեցանկյան կողմերի միջնակետերի հետ, ապա դրանք գտնվում են այդ կանոնավոր վեցանկյանը ներգծված շրջանագծի վրա: $B_1B_2\ldots B_6$ վեցանկյան կողմերը a_6 կամ ω_1 ներգծված շրջանագծին բաժանում են 6 հավասար մասերի: Բացի այդ, այդ բազմանկյան անկյուններից յուրաքանչյուրը հենված է 4 մասի վրա $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle B_1 = \angle B_2 = \ldots = \angle B_6 \Rightarrow$, որ $B_1B_2\ldots B_6$-ը կանոնավոր վեցանկյուն է:

Դիտարկենք $A_1A_2\ldots A_6$ վեցանկյունը: Նրանում A_1OA_2 եռանկյան մեջ $S_\Delta = \frac{64}{6}$:

Մյուս կողմից՝ $S_\Delta = \frac{1}{2} R^2 \sin 60^\circ$

Ստացվում է, որ $\frac{\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{64}{6}$, որտեղից $R = \frac{16}{\sqrt{6\sqrt{3}}}$

Քանի որ $a_6 = 2R\sin 30^\circ = R \Rightarrow a_6 = \frac{16}{\sqrt{6\sqrt{3}}}$

Դիտարկենք $B_1A_2B_2$ եռ-ն Տ-ը: $B_1A_2 = A_2B_2 = \frac{a_6}{2} = \frac{8}{\sqrt{6\sqrt{3}}}$

$\angle A_2 = 120^\circ \Rightarrow S_{\Delta B_1A_2B_2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{64}{6\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{3}$;

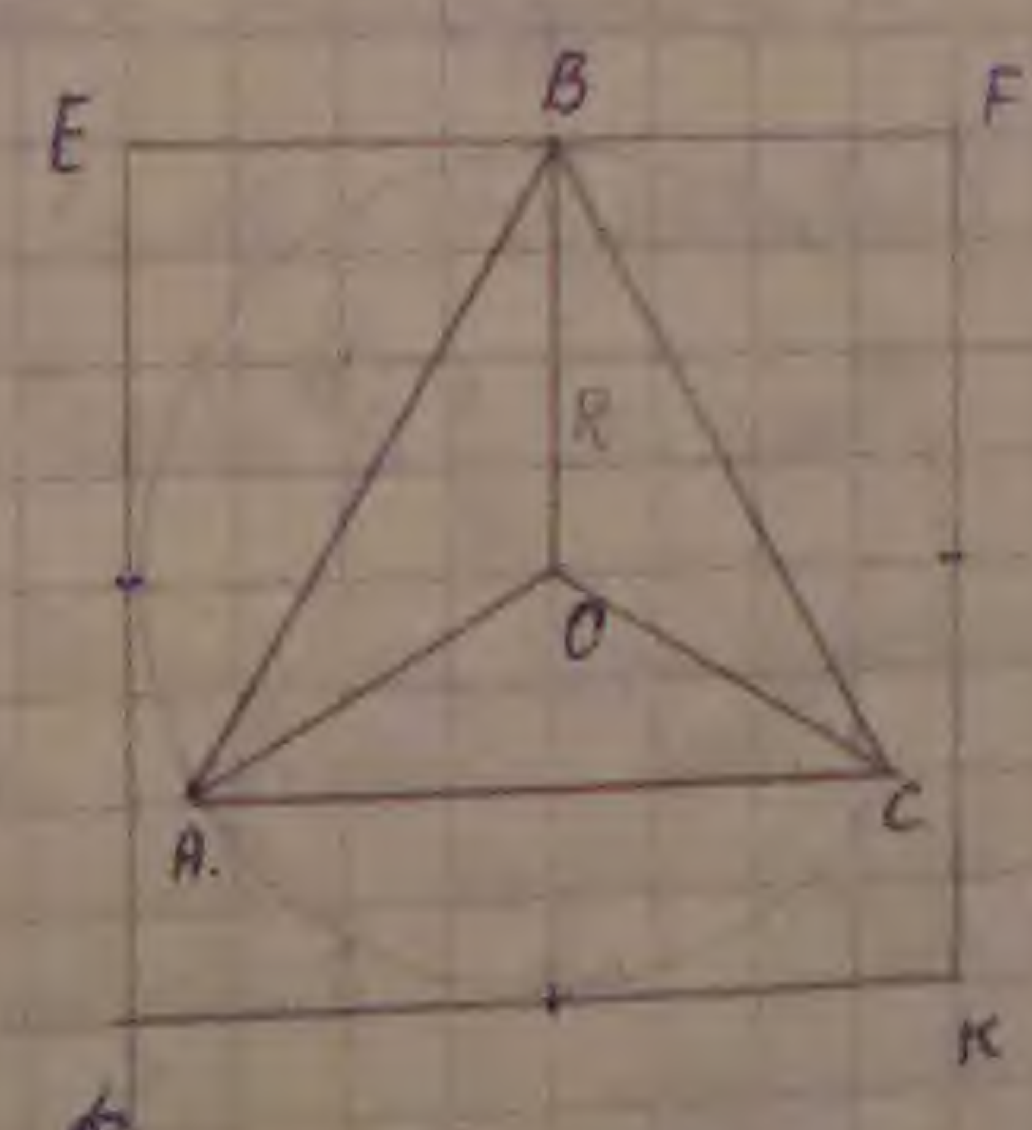
Քանի որ $\Delta B_1A_2B_2 = \Delta B_2A_3B_3 = \dots = \Delta B_6A_1B_1 \Rightarrow$ ապա

այդ բոլոր եռ-ների Տ-երի գումարը կլինի $S_1 = 6S_{\Delta B_1A_2B_2} =$

$= 16$: $S_{B_1B_2\dots B_6} = S_{A_1A_2\dots A_6} - S_1 = 64 - 16 = 48$:

Պատ՝ 48:

Խնդիր 6



$S_{\Delta ABC} = S$

$S_{EFK} - ?$

Տանենք OA, OB և OC շառավիղները: Դիտարկենք ABC կանոնավոր եռ-ը բաժանված է 3 հավասար եռանկյունների:

Դիտարկենք ΔAOB-ն. $OB = OA = R$; $\angle AOB = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ և

$S_{\Delta AOB} = \frac{S}{3}$, որտեղ S-ը ABC եռ-ի Տ-ն է, բայց այդ-

Նաև՝ $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}R^2\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}R^2}{4}$

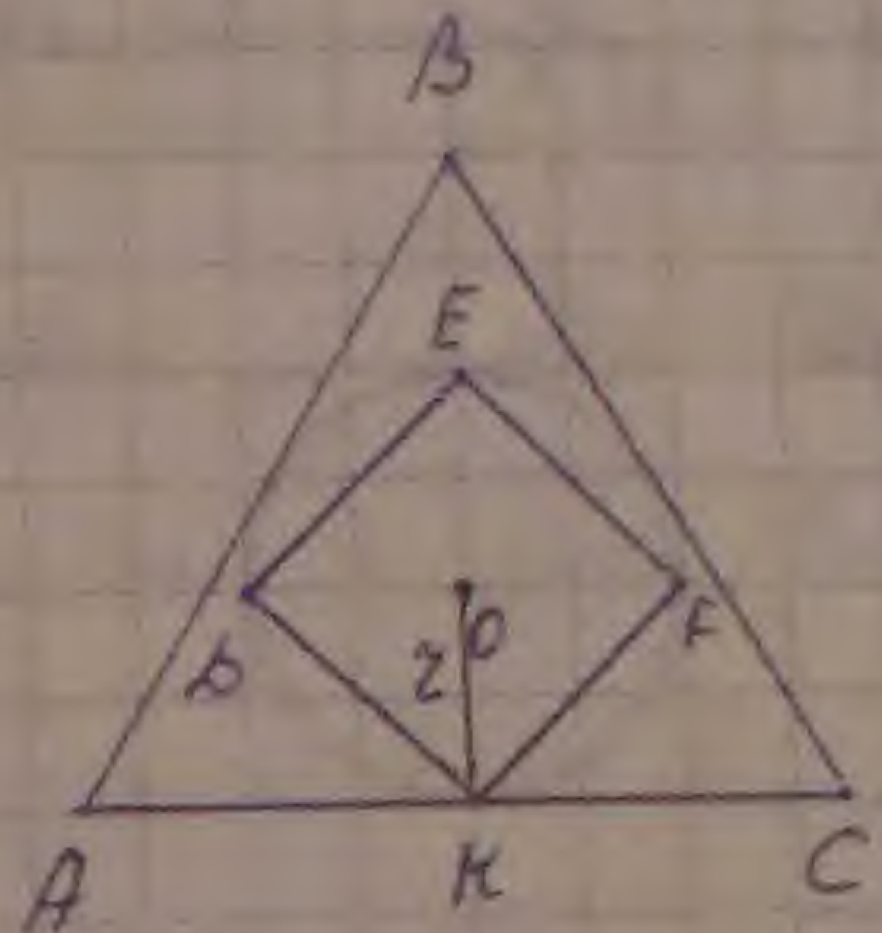
Այսինքն $\frac{\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{S}{3}$, որտեղից $R = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{3\sqrt{3}}}$,

Բայց $R = \frac{1}{2}DE \Rightarrow S_{DEFK} = DE^2 = 4R^2 = 4 \cdot \frac{4S}{3\sqrt{3}} =$

$= \frac{16\sqrt{3}}{9} \cdot S$:

Պատ՝ $\frac{16\sqrt{3}}{9} \cdot S$

Խնդիր 7.



$S_{\Delta ABC} = S$

Գտնել S_{DEFK}-ն

Տ Դիտարկենք ABC

կանոնավոր եռ-ը՝ $AB = BC = AC = a$ և $\angle A = \angle B = \angle C = \angle \alpha = 60°$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2 \sin 60° = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$:

Մյուս կողմից $S = \frac{1}{2}a \cdot 3r$ BK (որտեղ $BK = 3r$, քանի որ կանոնավոր եռ-ի թե՛ միջնագծերը, թե՛ կիսորդները, և թե՛ բարձրությունները հատվում են մեկ O կետում: Քանի որ միջնագծերը հատման կետով բաժանվում են 2:1, հարաբերությամբ՝ սկսած գագաթից, ապա $BK = 3r$) $\Rightarrow S = \frac{1}{2}a \cdot 3r \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{2S}{3a} = \frac{2S}{3} \cdot \frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{S}} = \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{S}}{3}$:

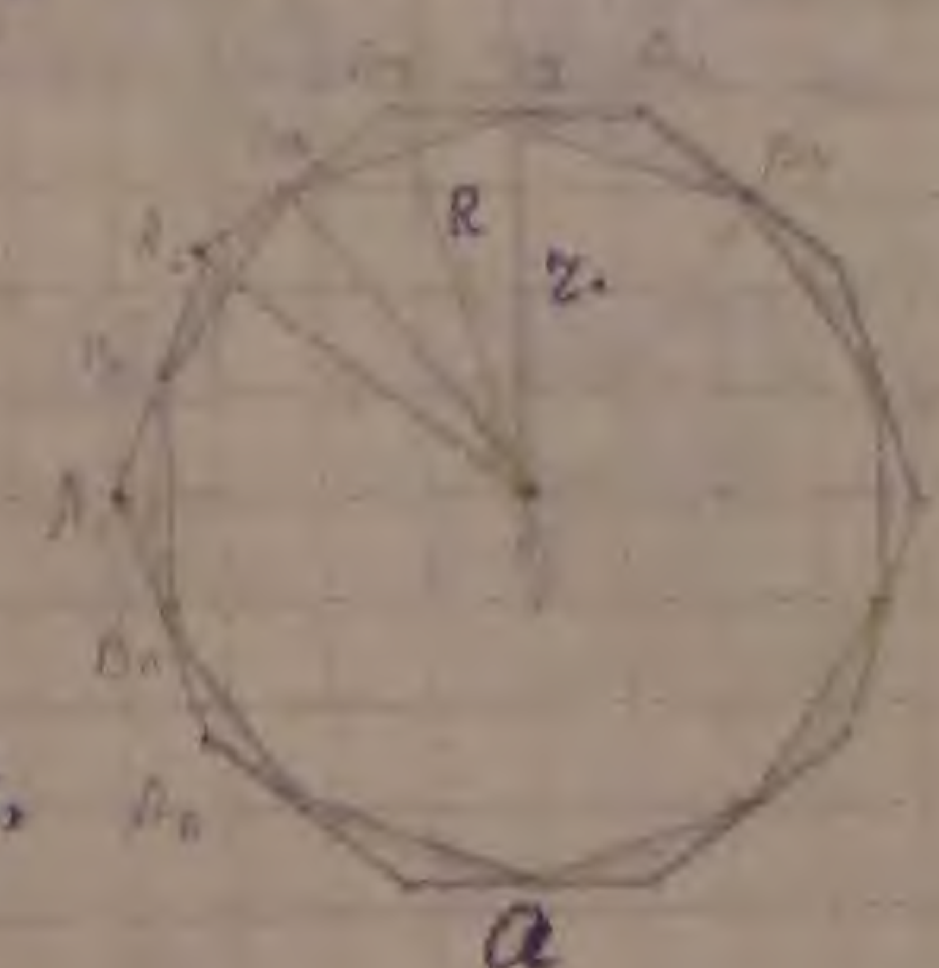
Այս կողմից խառանկյան անկյունագծի կեսը = 5

r, ուստի $FK = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$

$S_{EFKO} = FK^2 = 2r^2 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}\,S}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9} S$

Պատ․՝ $\frac{2\sqrt{3}}{9} S$

Խնդիր 8



$A_1A_2A_3 \ldots A_n$ և $B_1B_2B_3 \ldots B_n$ բազմ-ները կանոնավոր են։

$A_1A_2A_3 \ldots A_3$ բազմանկյանը ներգծված և արտագծված շրջանագծերի շառավիղներն են,

կողմը՝ a։

Գտնել $B_1B_2B_3 \ldots B_n$ բազմանկյան կողմը

Քանի որ մեծ բազմանկյանը ներգծված է կանոնավոր բազմանկյուն, այս վերջինիս գագաթները գտնվում են I-ի կողմերի միջնակետերի վրա։ $A_1A_2 \ldots A_n$ բազմ-ը արտագծած շրջ-ի շառավիղը եղ. R-ով։ $R = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{\sqrt{4r^2+a^2}}{2}}$

Դիտ. A_2A_3O հ.ս. եռ., որտեղ $A_2A_3 = a$, $A_2O = A_3O = R = \frac{\sqrt{4r^2+a^2}}{2}$,

ուստի օգտվելով կոսինուսների թ-մից, կարող ենք

Գտնենք $\cos\angle A_2OA_3$-ը:

$$a^2 = \sqrt{2R^2 - 2R^2\cos\angle A_2OA_3}$$

$$\cos\angle A_2OA_3 = 1 - \frac{a^2}{2R^2}.$$

Քանի որ $\angle A_2OA_3 = \angle B_2OB_3 \Rightarrow$

$$\cos\angle A_2OA_3 = \cos\angle B_2OB_3 = 1 - \frac{a^2}{2R^2} = 1 - \frac{a^2}{2}\cdot\frac{4^2}{a^2+4r^2} = \frac{4r^2-a^2}{4r^2+a^2}$$

$$\Rightarrow B_2B_3^2 = 2r^2 - 2r^2\frac{(4r^2-a^2)}{4r^2+a^2} = \frac{2r^2(4r^2+a^2-4r^2+a^2)}{4r^2+a^2} =$$

$$= \frac{2r^2\cdot 2a^2}{4r^2+a^2} = \frac{4a^2r^2}{4r^2+a^2} \Rightarrow B_2B_3 = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2+a^2}}$$

Պատ.՝ $\frac{2ar}{\sqrt{4r^2+a^2}}$

Խնդիր 9

Լուծում. 1) $b^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\alpha$

$$\frac{b^2}{2r^2} = 1 - \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{b^2}{2r^2}$$

2) $R = \sqrt{\frac{x^2}{4} + r^2}$

3) $a^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha = 2R^2(1-\cos\alpha) =$

$$= 2\left(\frac{x^2}{4} + r^2\right)\cdot\frac{b^2}{2r^2} = \frac{b^2(x^2+4r^2)}{4r^2}$$

$$2x = \frac{b\sqrt{x^2+4r^2}}{2r}$$

$$\left(\frac{2rx}{b}\right)^2 = x^2+4r^2 \Rightarrow \frac{\overset{4}{\cancel{16}}r^2x^2}{b^2} = x^2+4r^2$$

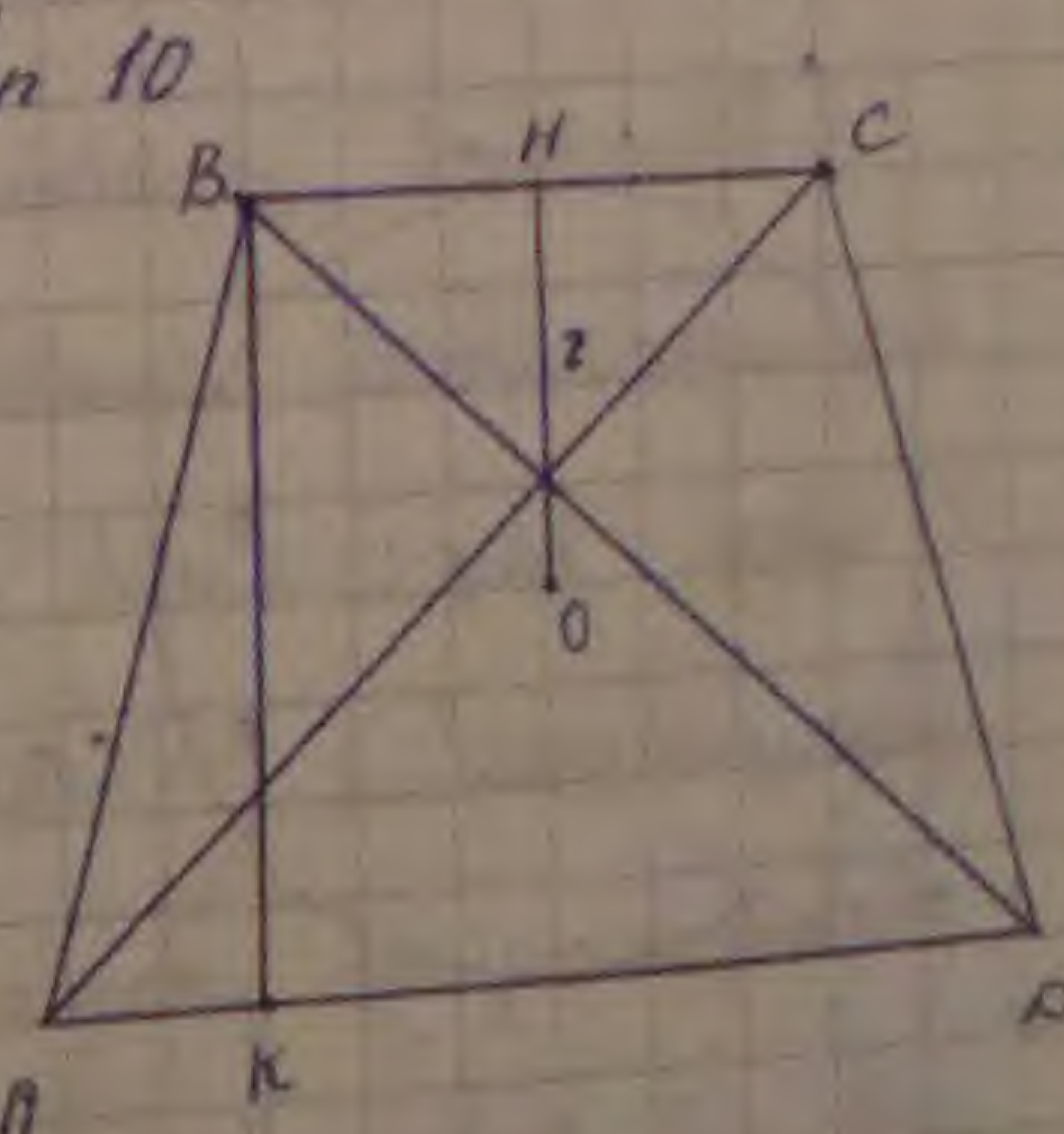
$$\frac{\overset{4}{\cancel{16}}r^2}{b^2} = 1 + \frac{4r^2}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{4r^2}{\frac{16r^2}{b^2}-1} = \frac{4r^2b^2}{\sqrt{16r^2-b^2}}$$

$$x = \frac{2rb}{\sqrt{4r^2-b^2}} \Rightarrow 2x = \frac{4rb}{\sqrt{16r^2-b^2}}$$

Պատ.: $x = \frac{2rb}{\sqrt{4r^2-b^2}}$

Խնդիր 10



$BC \parallel AD$ և $AB \not\parallel CD$

$AB = CD$

$OH = r = 3$

$P_u = 32$

Գտնել AC-ն

Լուծում. Քանի որ սեղանին ներգծած շրջանագիծ, ապա նրա հանդիպակաց կողմերի գումարները հավասար են ⇒ $AB + CD = BC + AD = 16$ ⇒ քանի որ $AB = CD$, ապա $AB = CD = 8$

$BC = 12$

$BK = 2r = 6 \Rightarrow AK = \sqrt{64-36} = 2\sqrt{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot 2\sqrt{7} + 2 \cdot BC = 16$

$2\sqrt{7} + BC = 8 = KD \Rightarrow BD = 10$

Պատ.: 10.

Խնդիր 11.

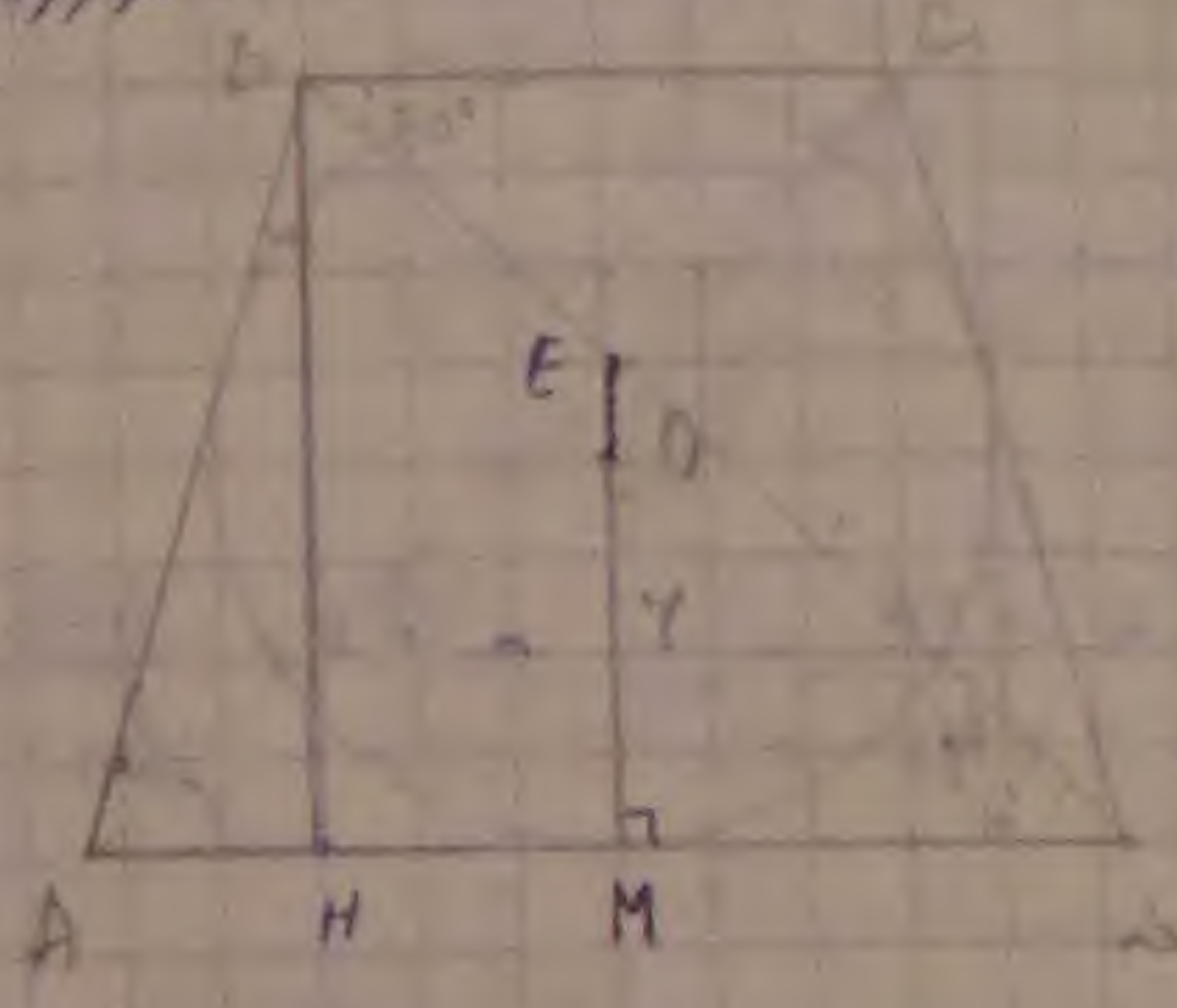
$BC \parallel AD$; $AB \nparallel CD$

$AB = CD$

$r = 12$

$\angle CAD = \angle BDA = 30^\circ$

$P_{ABCD} - ?$



(Ներգծված շրջանագծի O կենտրոնը ընկնելով ABCD հավասարասրուն սեղանի AD կողմի շրջանագծի շոշափման M կետի հետ: Քանի որ ըստ պայմանի AED եռանկյունը հավասարասրուն է ($\angle CAD = \angle BDA = 30^\circ$), ապա AD կողմի OM միջնուղղահայացի շարունակությունը կանցնի նաև AED եռանկյան E գագաթով, որը նաև սեղանի անկյունագծերի հատման կետն է:)

ABCD հավասարասրուն սեղանի B գագաթից AD կողմին տանենք BH ուղղահայացը, որն = է շրջա-

Նա գծի տրամագիծն՝ $BH = 2r = 24$

Դիտարկենք HBD ուղղանկյուն եռանկյունը:

$tg30^\circ = \frac{BH}{HD}$, որտեղից $HD = \frac{BH}{tg30^\circ} = 24\sqrt{3}$

Քանի որ $ABCD$ հավասարասրուն սեղանի մեջ $HD =$ է սեղանի հիմքերի կիսագումարին՝ $HD = \frac{BC + AD}{2}$, որտեղից

հիմքերի գումարը կլինի. $BC + AD = 2 \cdot HD = 48\sqrt{3}$

Սակայն, ինչպես գիտենք քառանկյանը կարելի է ներգծել շրջանագիծ, երբ նրա հանդիպակաց կողմերի գումարները հավասար են $\Rightarrow AB + CD = BC + AD = 48\sqrt{3}$:

Սեղանի պարագիծը կլինի. $P_{ABCD} = AB + CD + BC + AD = 2(BC + AD) = 96\sqrt{3}$:

Պատ.՝ $P_{ABCD} = 96\sqrt{3}$:

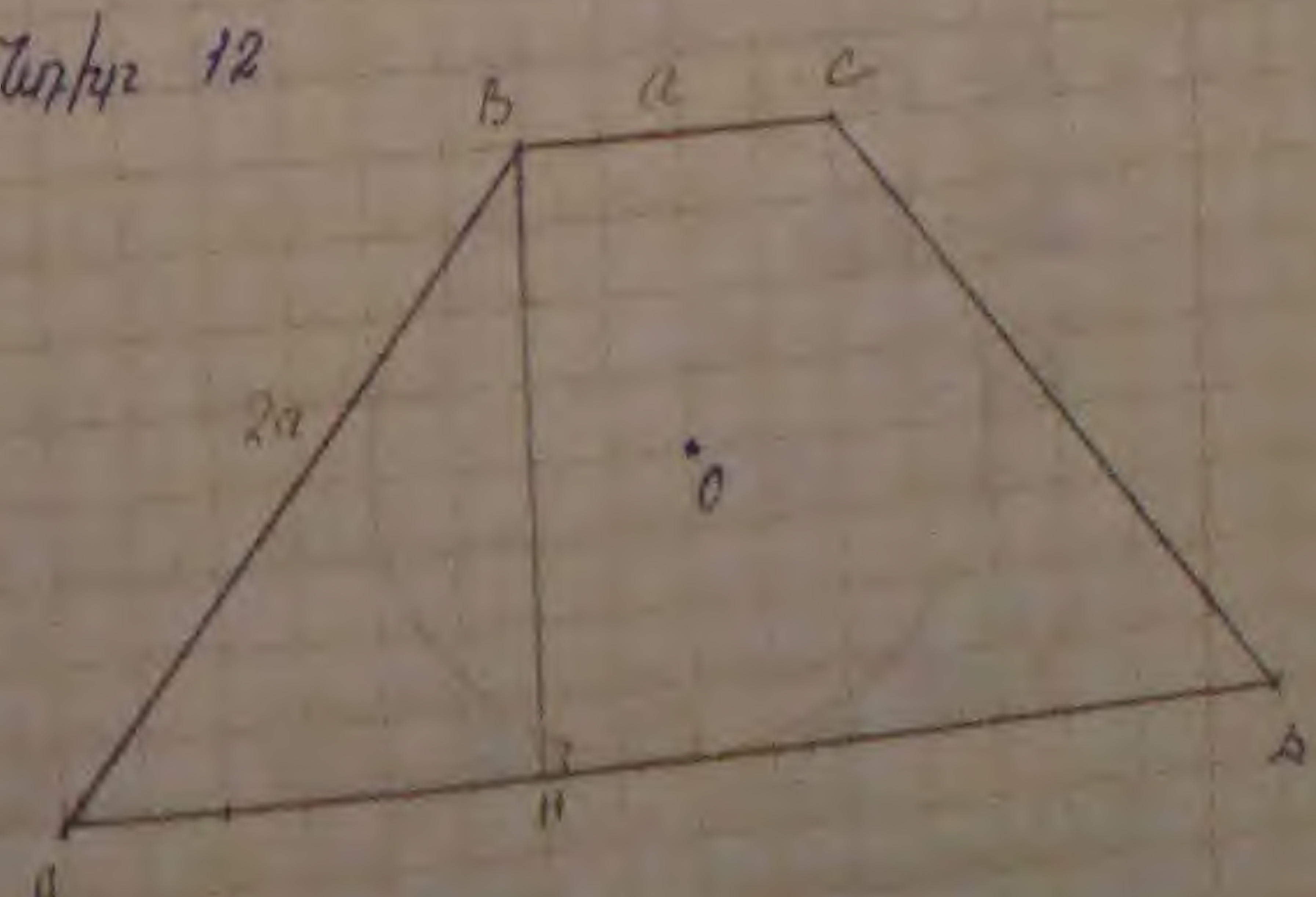
Խնդիր 12

$BC \parallel AD$; $AB \nparallel CD$:

$AB = CD$

$BC = \frac{1}{2} AB = a$

S_{ABCD} – ?



Քանի որ քառանկյանը կարելի է ներգծել շրջանագիծ, ապա՝ նրա հանդիպակաց կողմերի գումարները հավասար են. ուրեմն $AB + CD = BC + AD = 4a \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = CD = 2a;\ BC = a;\ AD = 3a$

Տանենք BH բարձրությունը: AD հիմքի վրա առաջացած AH հատվածը = է հիմքերի տարբերության կեսին՝

$$AH = \frac{\cancel{BC +} AD - BC}{2} = a$$

Ըստ Պյութագորասի թեորեմի. $BH = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$

Արդյունքում որ. $BC = a;\ AD = 3a$ և $BH = \sqrt{3}a$, այստեղից

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH = 2a \cdot \sqrt{3}a = 2\sqrt{3}a^2$$

Պատ՝ $S_{ABCD} = 2\sqrt{3}a^2$:

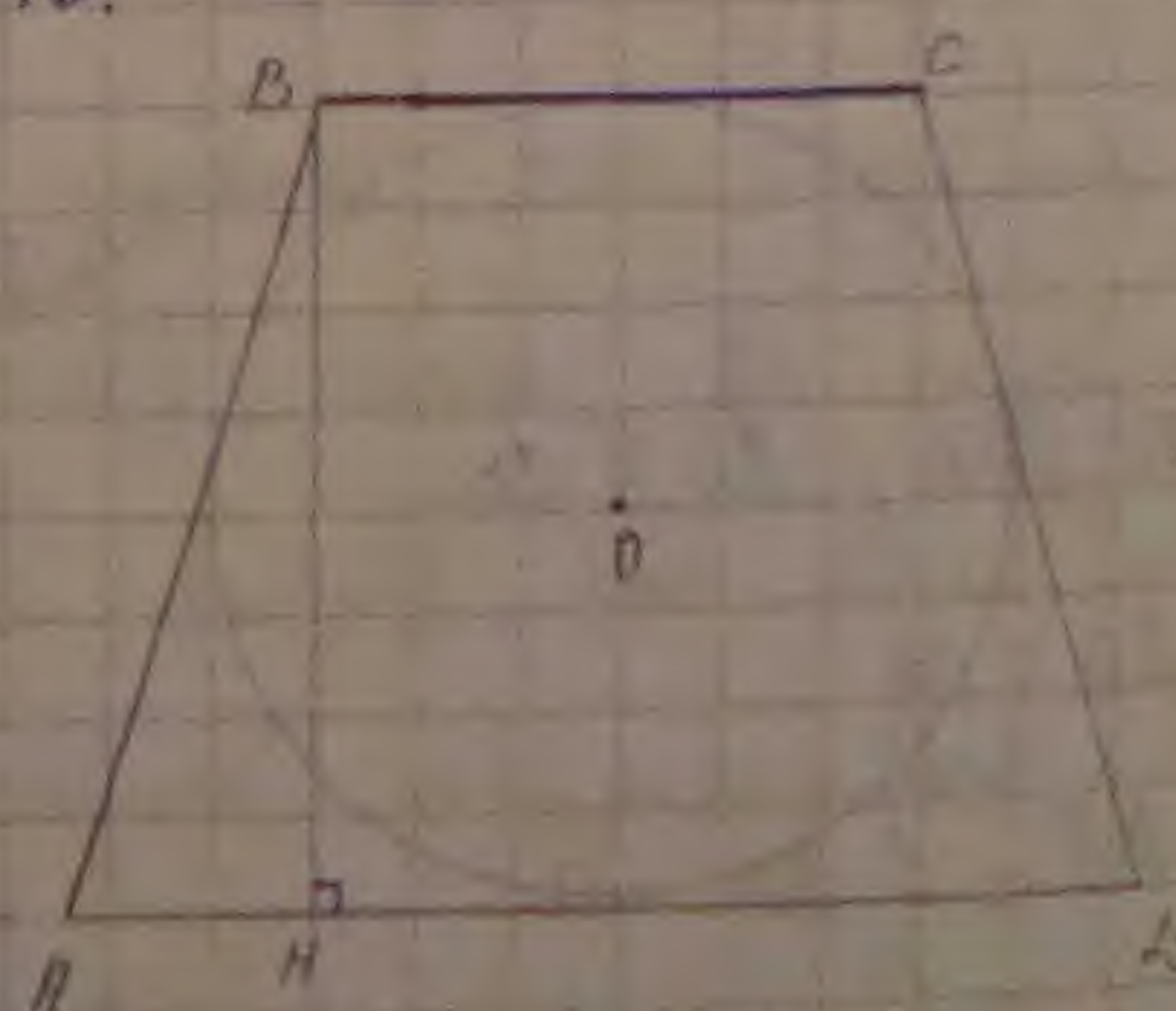
Խնդիր 13.

$BC \parallel AD;\ AB \nparallel CD$

$AB = CD = b$

$AD = 3BC$

BH - ?



Քանի որ O կենտրոնով շրջանագիծը ներգծված է $ABCD$ հավասարասրուն սեղանին, ուրեմն $AB + CD = BC + AD = 2b$.

Քանի որ պայմանի $AD = 3BC \Rightarrow BC + AD = 4BC = 2b$, որտեղից $BC = \frac{b}{2}$, իսկ $AD = \frac{3b}{2}$
BH բարձրության H հիմքում կետով AD կողմը տրոհված է
AH և HD՝ երկու հատվածների, որոնցից $AH = \frac{AD - BC}{2} = \frac{b}{2}$։

Ըստ Պյութագորասի թեորեմի $BH = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}b}{2}$։

Պատ.՝ $\frac{\sqrt{3}b}{2}$

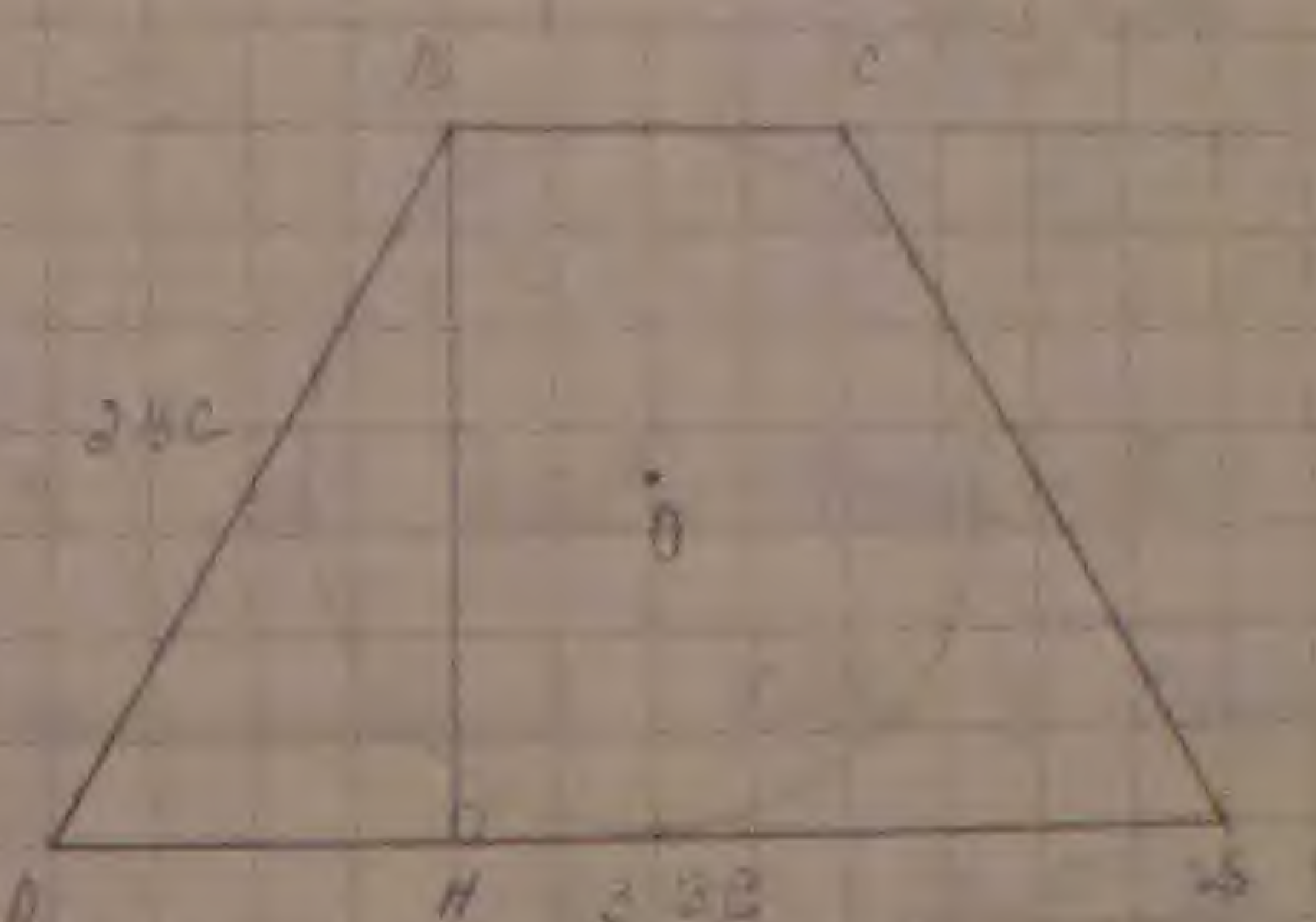
Խնդիր 14

$BC \parallel AD$; $AB \parallel CD$

$AB = CD = 2BC$

$S_{ABCD} = S$

AD - ?

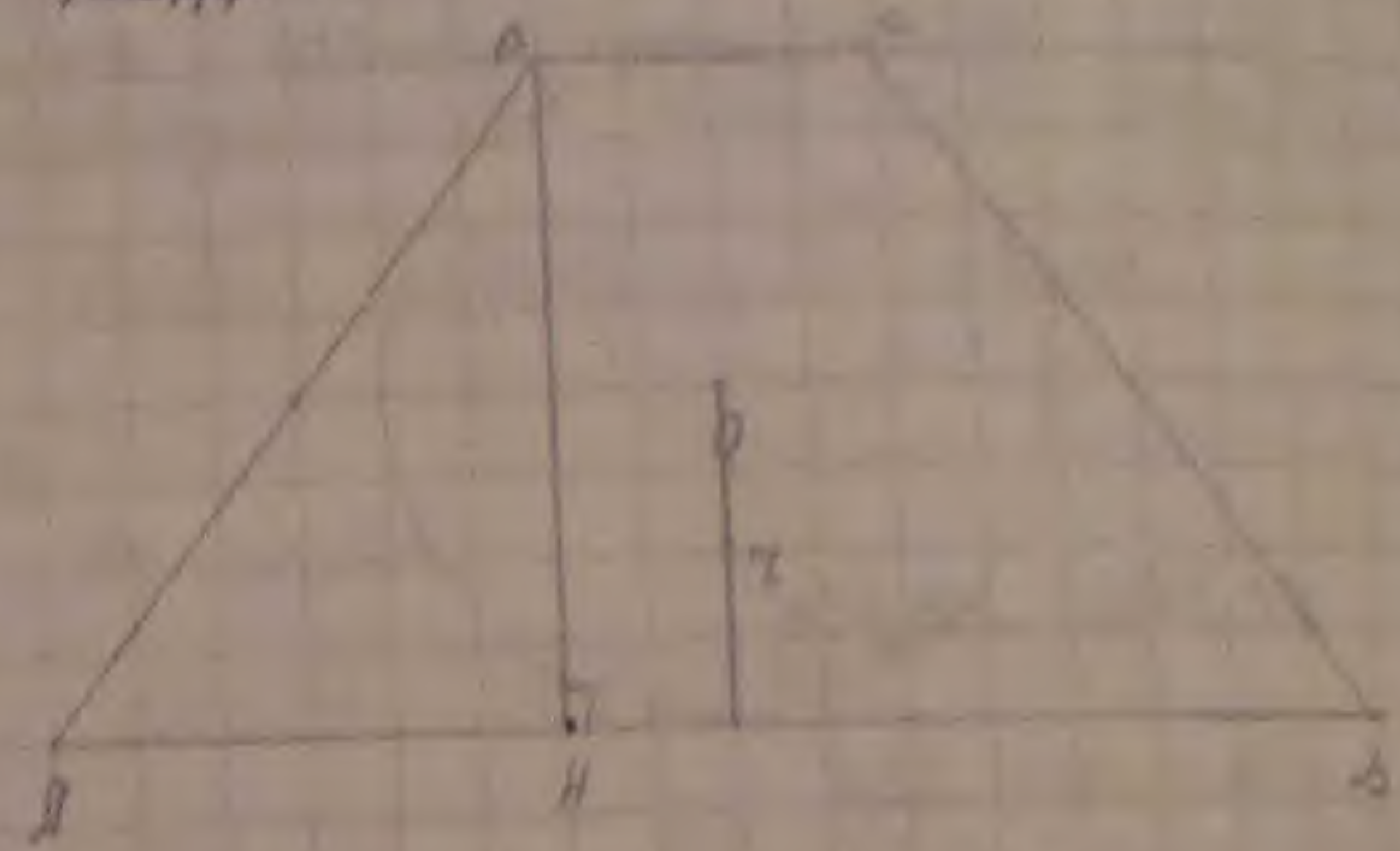


Քանի որ O կենտրոնով շրջանագիծը ներգծված է ABCD հավա-սարասրուն սեղանին, ապա՝ $AB + CD = BC + AD = 4BC \Rightarrow AD = 3BC$։
B գագաթից AD կողմին տանել BH ուղղահայացը, որը AD-ի հետ հատման H կետով այն տրոհում է AH և HD հատ-վածների, որտեղից՝ $AH = BC$։ Նկատենք, որ $AB = 2BC$;
$AH = BC$. Իսկ ABH ուղղանկյուն եռանկյունը կարող ենք
գրել BH-ն արտահայտված BC-ով՝ $BH = \sqrt{3}BC$։
Այսպիսով որ $AD = 3BC$; $BH = \sqrt{3}BC$, ապա՝ կարող ենք գրել.

$S = 2BC \cdot \sqrt{3}BC = 2\sqrt{3}BC^2$, որտեղից $BC = \sqrt{\frac{S}{2\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}S}{6}}$։

Պատ.՝ $\sqrt{\frac{\sqrt{3}S}{6}}$։

Խնդիր 16



$BC \parallel AD$; $AB \nparallel CD$

$AB = CD$

$BC = 4$

$AD = 16$

$h - ?$

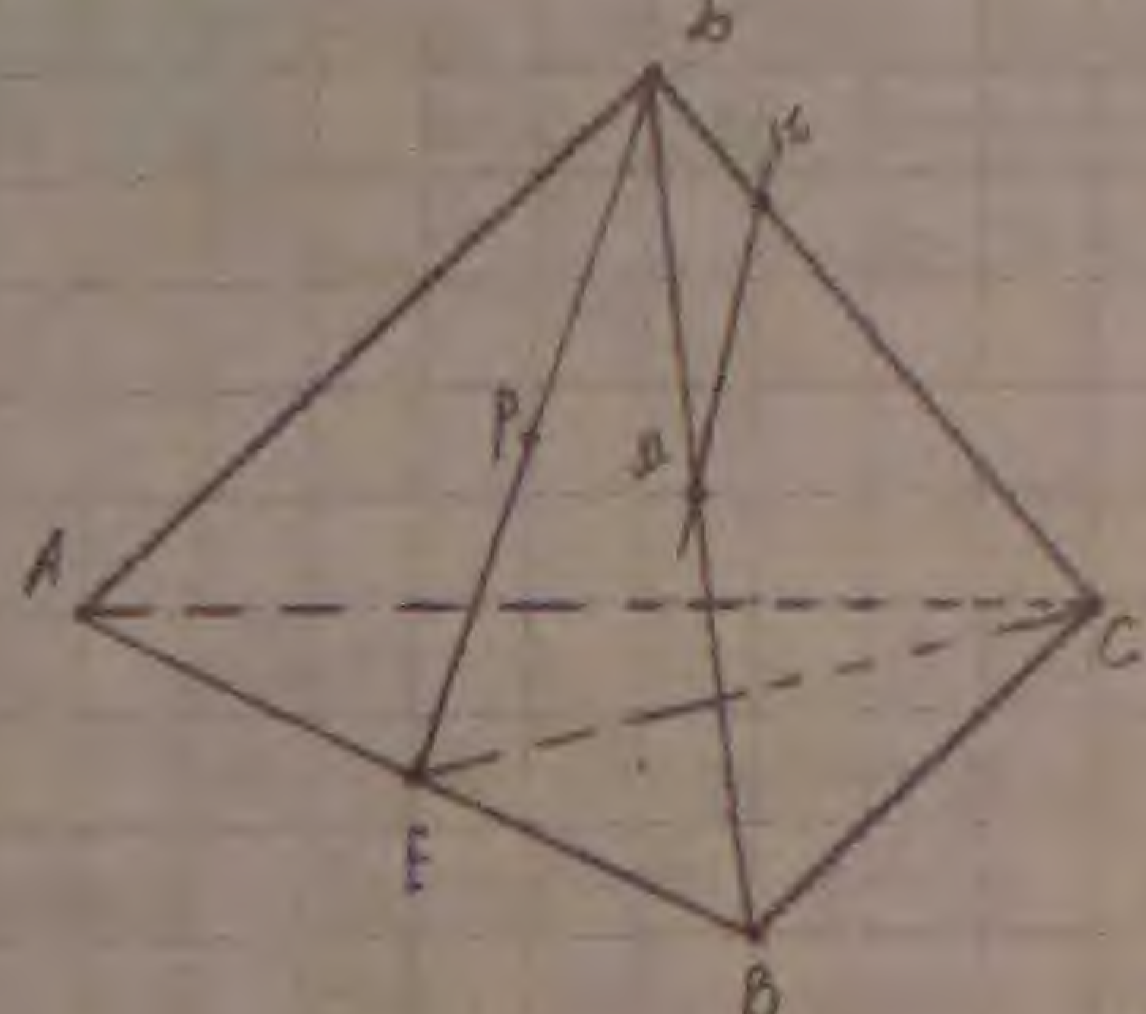
(B զու) Քանի որ O կենտրոնով շրջանագիծը ներգծված է ABCD հավասարասրուն սեղանին, ապա $2AB = BC + AD = 20 \Rightarrow AB = CD = 10$։

B գագաթից AD հիմքին տանենք BH բարձրությունը. Հավասարասրուն AH հատվածը կլինի. $AH = \frac{AD - BC}{2} = 6$.

Դիտարկենք, որ $AB = 10$; $AH = 6$, ABH ուղղանկյուն եռանկյունուց կարող ենք գտնել BH-ը։

02. 03 2006թ.

Խնդիր 1



Նկ

ա) DA ուղիղը ընկած է միաժամանակ երկու՝ DAC և DAB հարթությունների մեջ, այսինքն՝ ընդհանուր ուղիղ է այդ հարթությունների համար:

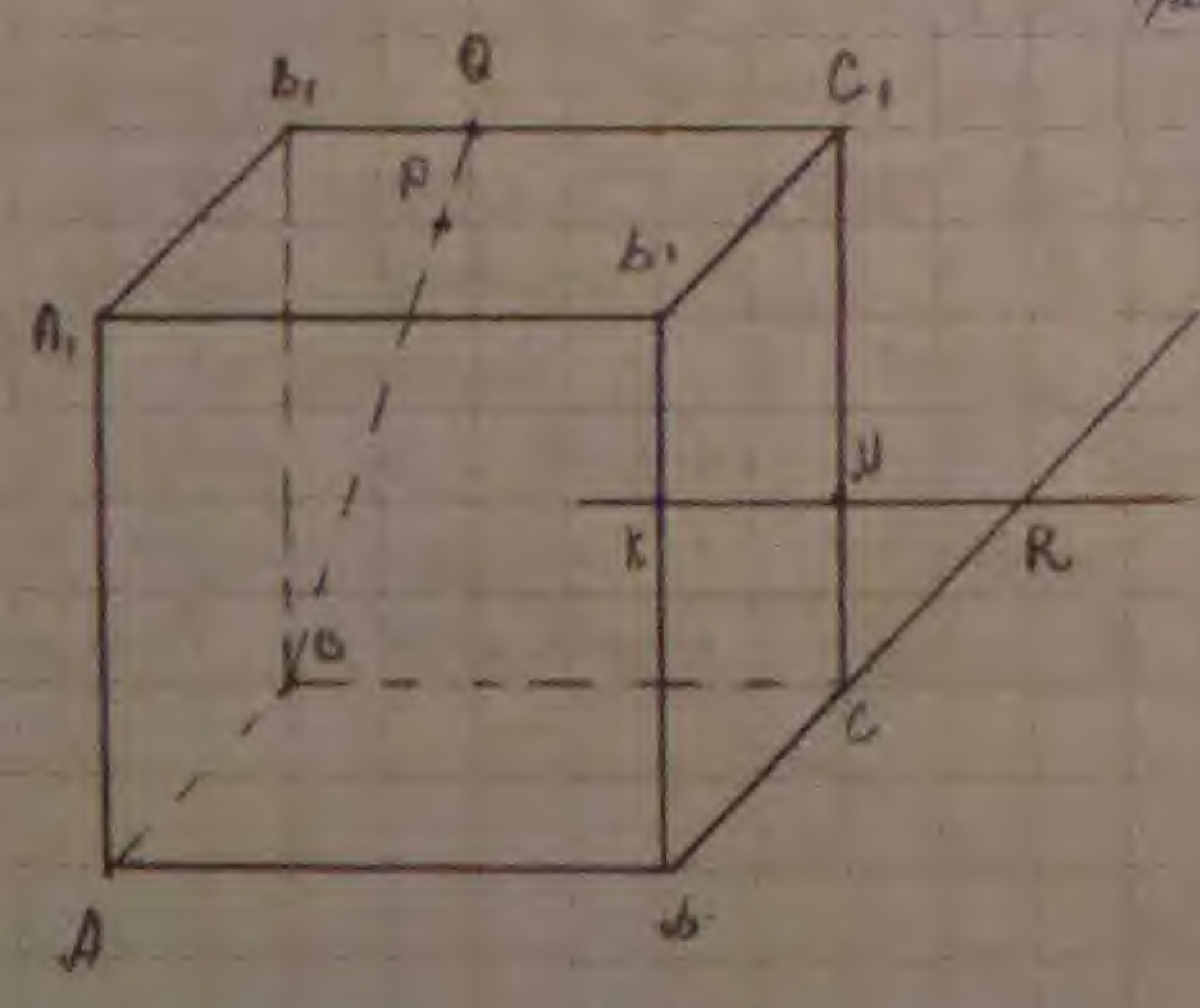
DC-ով են անցնում ADC և BDC հարթությունները, DB-ով՝ ADB-ն և CDB-ն, AB-ով՝ ADB-ն և ACB-ն, BC-ով՝ DBC-ն և ACB-ն, AC-ով՝ DAC-ն և ABC-ն, MK-ով՝ BDC-ն, PE-ով, քանի որ E-ն ու ADB-ն, CE-ով ACB-ն:

բ) ABC հարթությունը հատում են DE, DA, DB, և DC, MK ուղիղները, ADC-ն՝ AB, BD, BC ուղիղները, DBC-ն՝ AD, AC, AB, ED, EC ուղիղները, ADB-ն՝ AC, CE, CB, MK, CD, CA ուղիղները:

գ) ADB հարթության վրա ընկած կետերն են՝ A-ն, D-ն, B-ն, P-ն, E-ն, M-ը, DBC-ինը՝ D-ն, M-ը, B-ն, C-ն, K-ն, CDA-ինը՝ C-ն, A-ն, D-ն, K-ն, ACB-ինը՝ A-ն, C-ն, B-ն, E-ն:

դ) ABC և DBC հարթությունները հատվում են BC ուղղով, ABD-ն և CDA-ն՝ AD-ով, PDC-ն և ABC-ն՝ EC-ով:

Խնդիր 2



ա) BC_1D հարթությանը պատկանող կետերն են՝ D-ն, K-ն, D_1-ը, C_1-ը, M-ը, C-ն, R-ը, իսկ BQC-ինը՝ B, B_1-ը, Q-ն, P-ն, C_1-ը, M-ը, C-ն:

բ) AA_1 ուղիղը ընկած է AA_1B_1B և AA_1D_1D հարթությունների մեջ

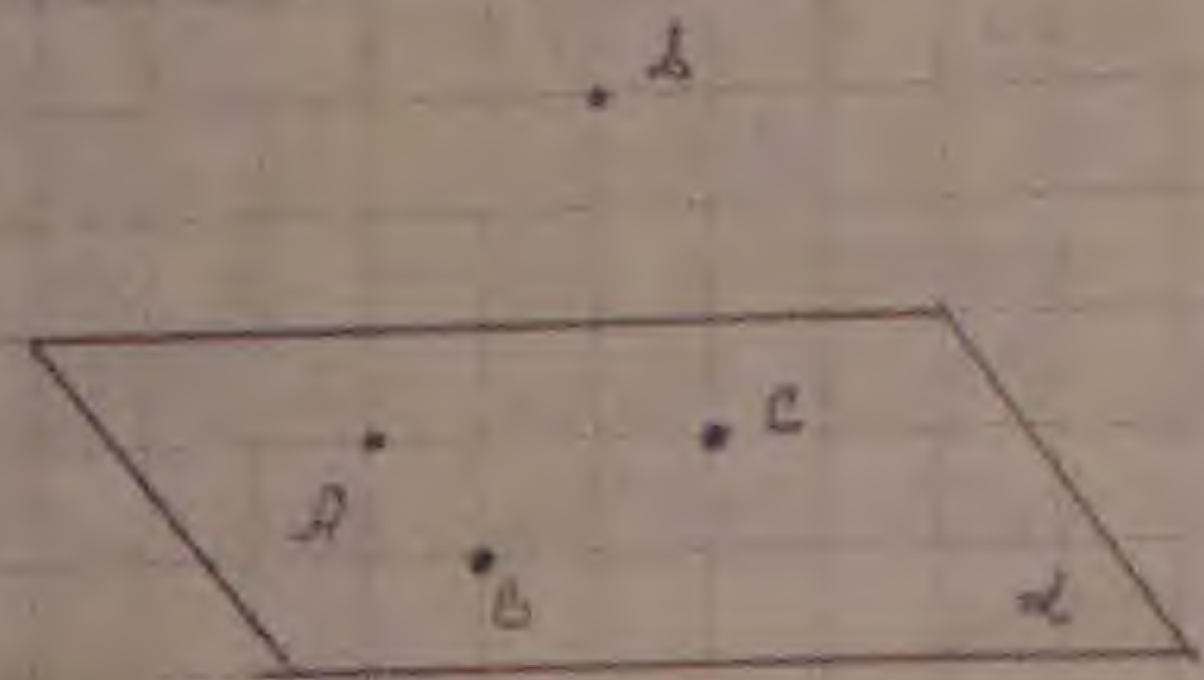
գ) KM ուղիղը և ABC հարթության հատման կետը R-ն է, իսկ DK և BP ուղիղները $A_1B_1C_1D_1$ հարթությանը հատում են D_1 և Q կետերում

դ) AA_1B_1 և ACD հարթությունները հատվում են AB ուղղով, CB_1C_1-ը և ABC-ն՝ BC-ով, MK և DC ուղիղները հատվում են R կետում, B_1C_1-ը և BP-ն՝ Q կետում, C_1M-ը և DC-ն՝ C կետում:

Խնդիր 3

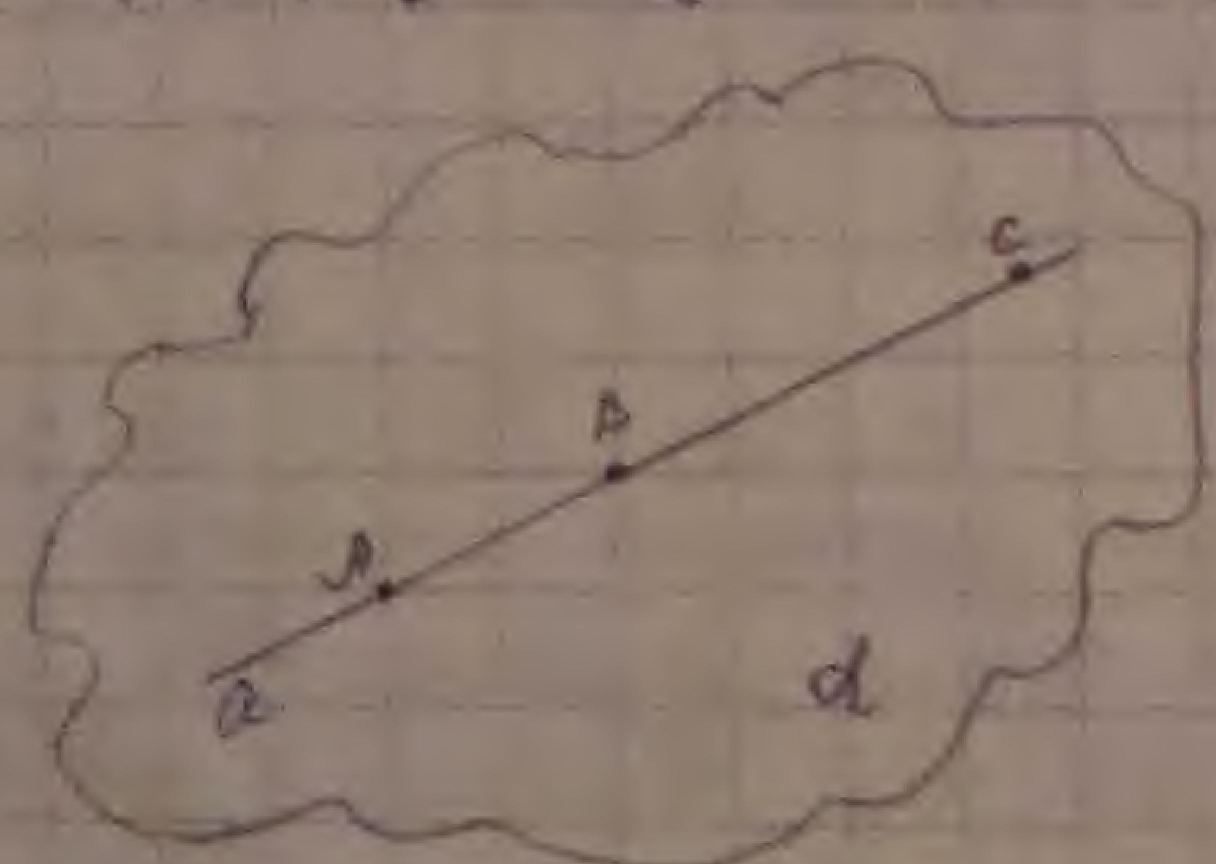
Արդյոք ճշմարիտ է․ ա) ցանկացած երեք կետեր գտնվում են մի հարթության վրա, բ) ցանկացած չորս կետեր գտնվում են մի հարթության վրա, գ) ցանկացած չորս կետեր մի հարթության վրա չեն գտնվում, դ) ցանկացած երեք կետերով անցնում է հարթություն, ընդ որում միայն մեկը։
ա)-ն և դ-ն՝ այո, իսկ բ-ն և գ-ն՝ ոչ։

Խնդիր 4



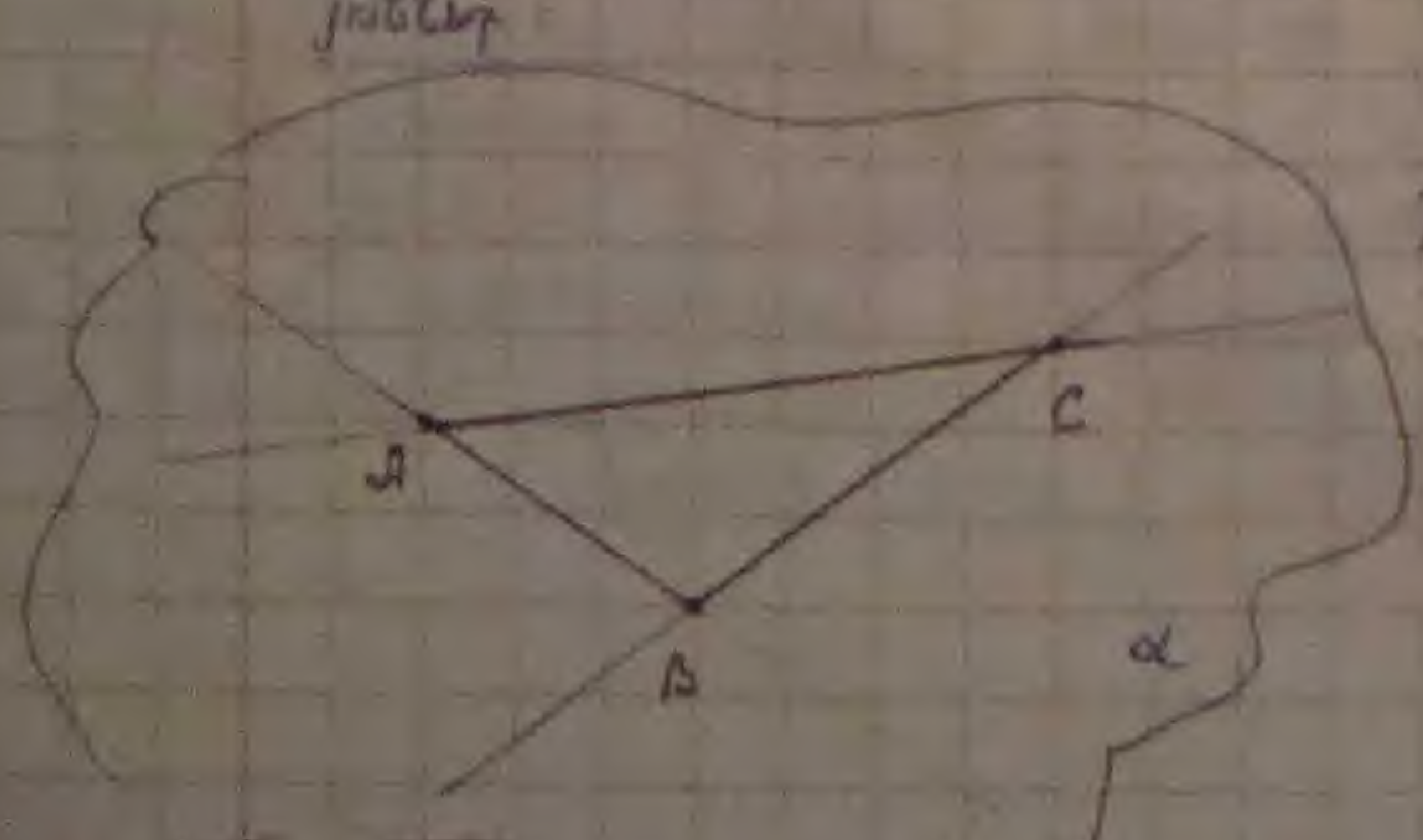
Դիցուք A, B, C և D կետերը չեն գտնվում մի հարթության վրա, ապա այդ կետերից որևէ երեքը չեն կարող ընկած լինել մի ուղիղ վրա (քանի որ համաձայն հետևանք 1-ի, ուղղով և նրա վրա չգտնվող կետով անցնում է մեկ հարթություն, իսկ մյուս դեպքում A, B, C և D կետերով հարթություն չի անցնում) և AB և CD ուղիղները չեն կարող հատվել (քանի որ համաձայն հետևանք 2-ի հատվող ուղիղներով անցնում է մեկ հարթություն)։

Խնդիր 5.



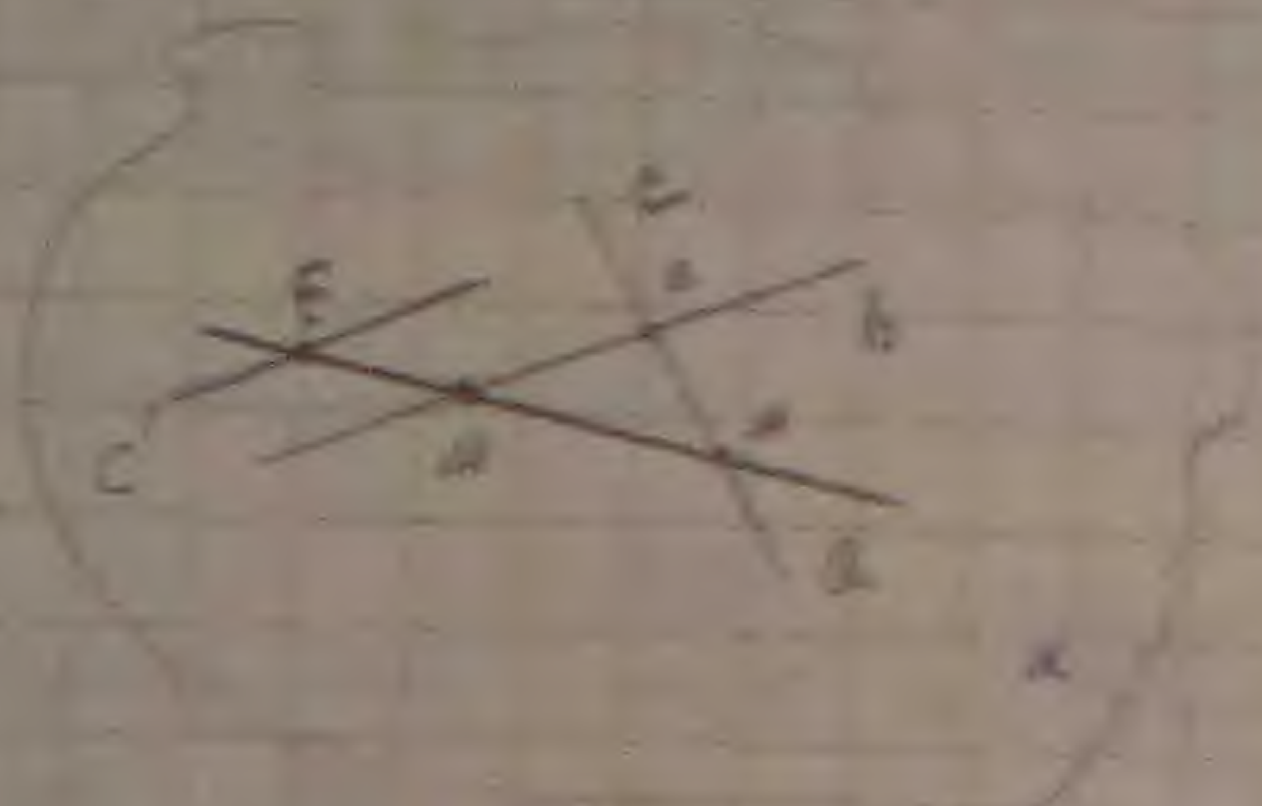
Դիցուք թե A և C կետերով անցնող ցանկացած α հարթություն. ~~AC~~ AC ուղիղը մի ուղիղ է ընկած A, B և C կետերով անցնող ուղիղը ընկած է α հարթության մեջ, համաձայն Ա-2 աքսիոմի։ Այդ դեպքում հարթությունները անվերջ են, որ A, B և C կետերով անցնում են անվերջ բազմություն հարթություններ։

Խնդիր 6



Տրված ABC եռանկյան գագաթները α հարթությանը չեն պատկանում, քանի որ AB, AC, BC ուղիղների երկու կետերը պատկանում են հարթությանը, A-ն և B-ն, A-ն և C-ն։

[illegible] AB, AC և CB [illegible]



Խնդիր 7

[illegible] $a \in \alpha$

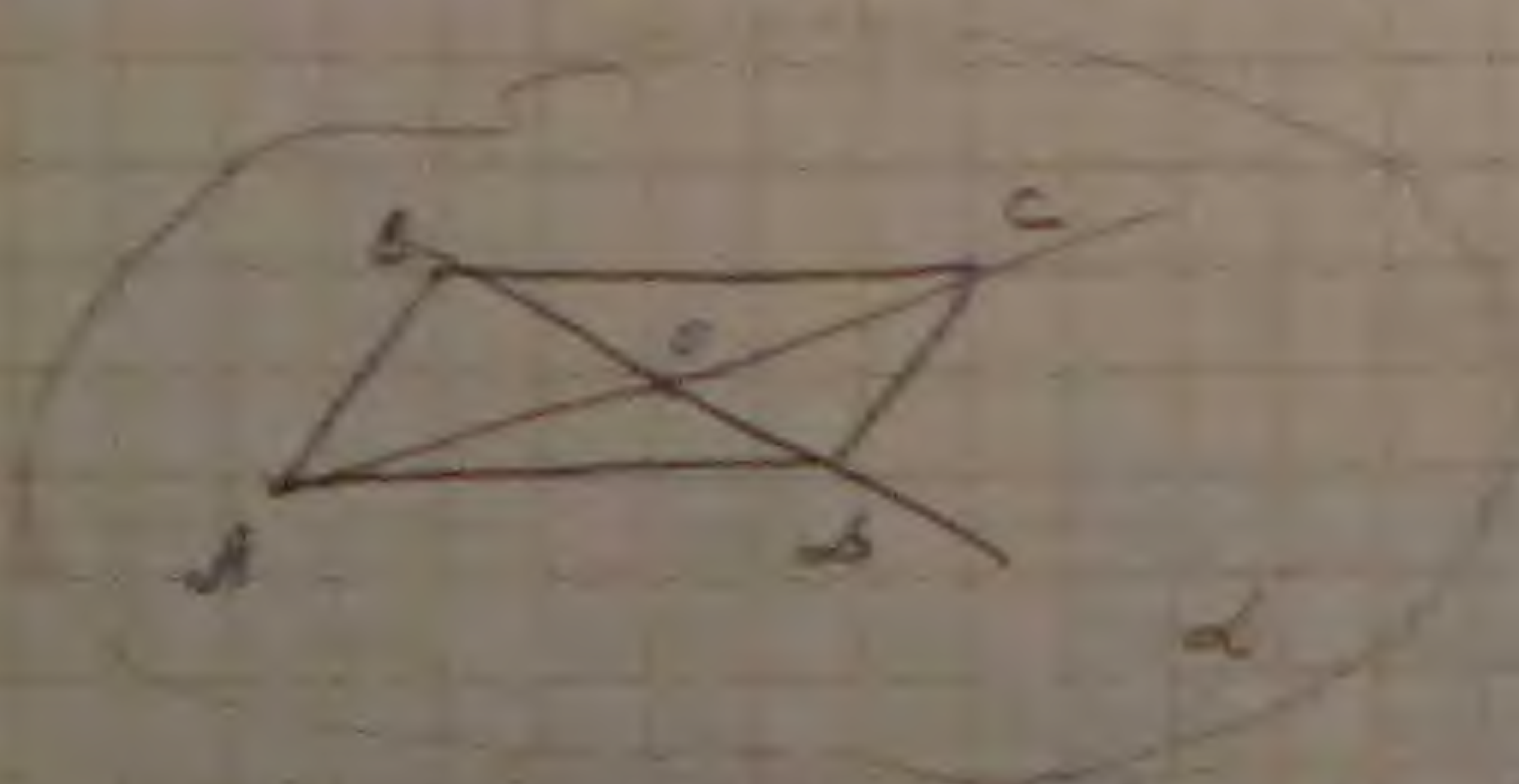
[illegible] $C' \in \alpha$ [illegible]

[illegible] $c' \parallel b$ [illegible] $c' \in \alpha$

[illegible]

Խնդիր 8

[illegible]



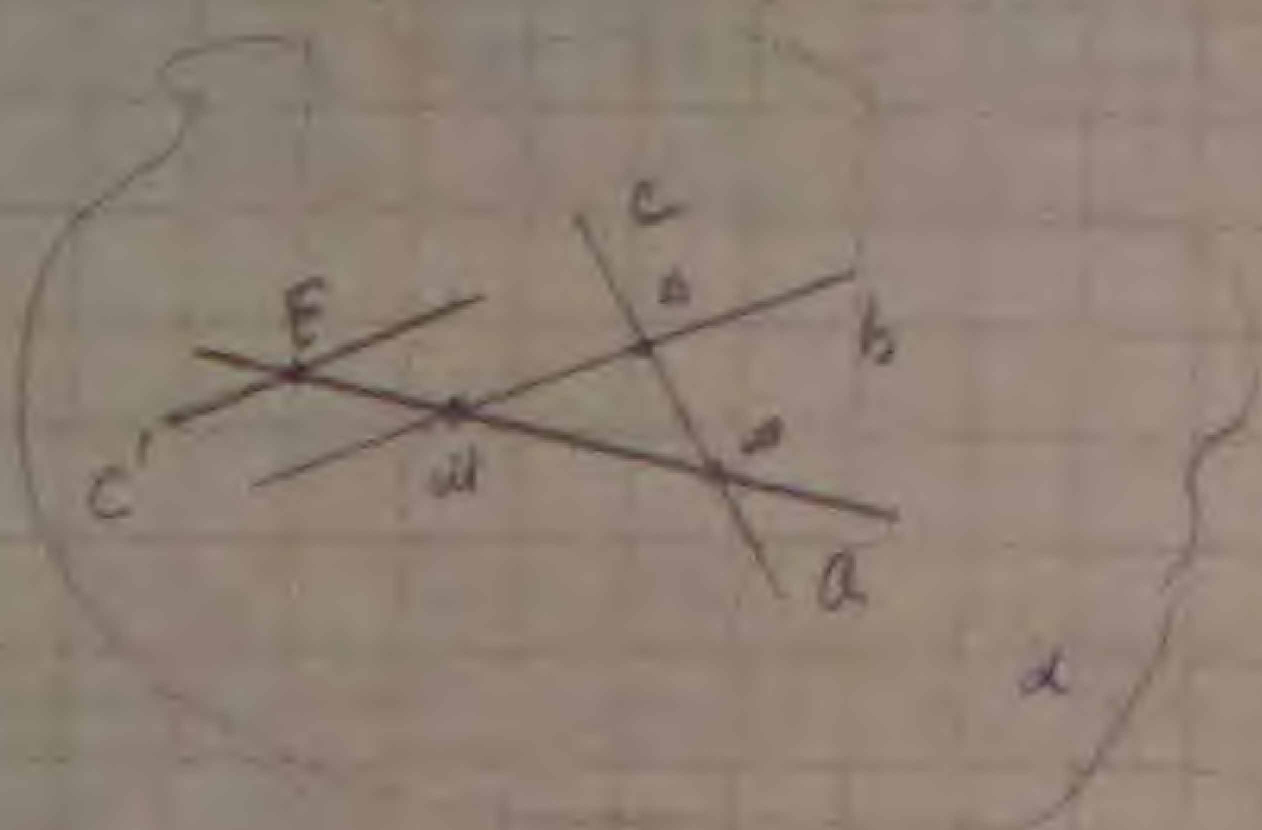
Խնդիր 9

$A \in \alpha$, $B \in \alpha$ և $C \in \alpha$

[illegible] $C \in \alpha$, $D \in \alpha$

[illegible] $C \in \alpha$ և $D \in \alpha$:

B-ն և C-ն, ընկած են α հարթության մեջ, ապա այդ ուղիղները ամբողջ ... ընկած են այդ հարթության մեջ, որ A, B, C ուղիղները
AB, AC և CB հատվածները ևս ընկած են այդ հարթության մեջ

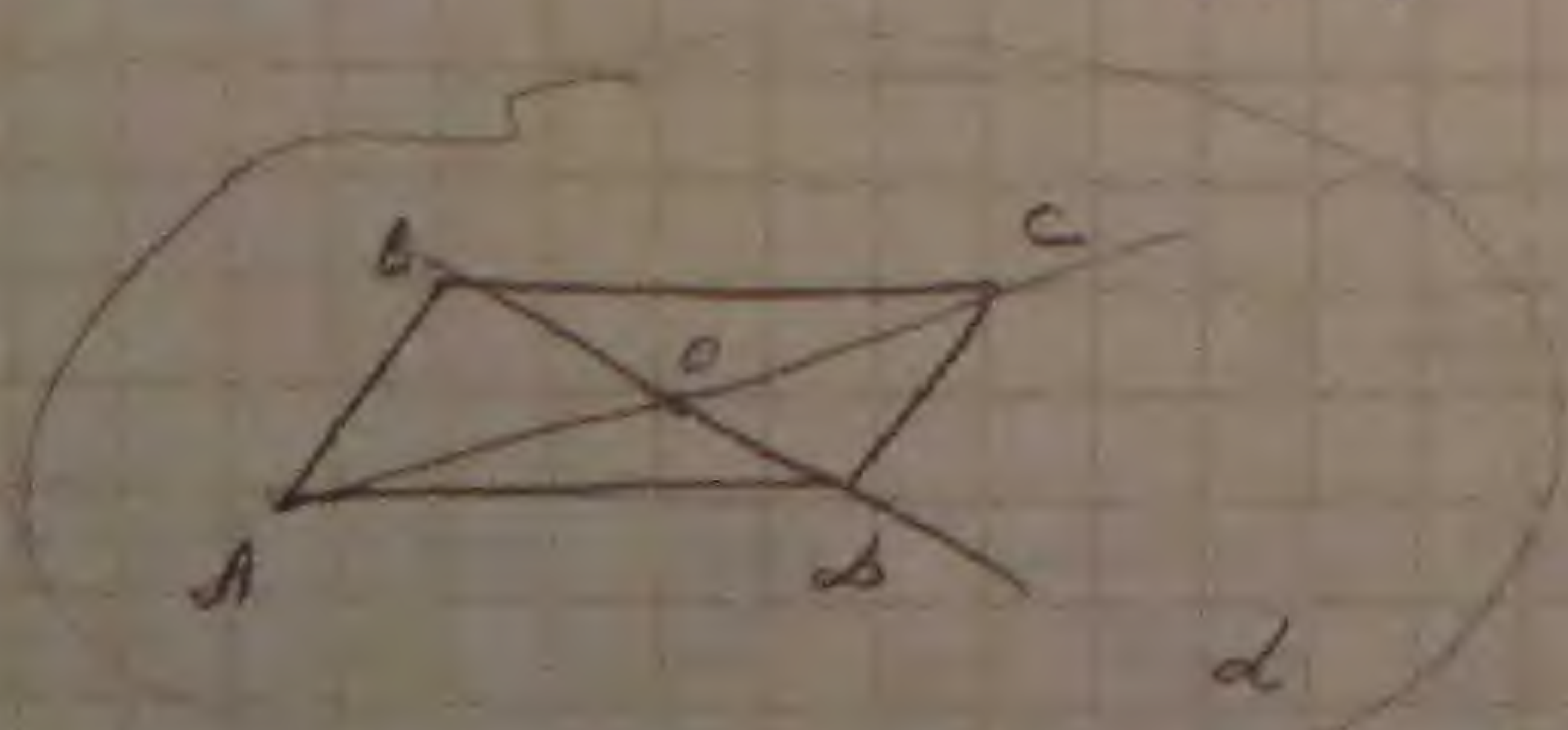


Խնդիր 7.
Տրված են a և b ուղիղները, որոնք հատվում են M կետում: ~~...~~ M կետով չանցնող, a և b ուղիղները հատող c ուղիղը ... Ցույց տալ, որ $c \in \alpha$

Ապացուցենք c ուղիղը a և b ուղիղները հատում է A և B կետերում, որոնք ∈ են α հարթությանը, որ համաձայն 2-րդ աքսիոմի $c \in \alpha$: Եթե c'-ն չանցնի ... հատող ուղիղներից մեկի ... , ապա ... է կետում: Եթե ենթադրենք, որ c'-ը ընկած չէ α հարթության մեջ և ... է ... , որ c'-ը հատում է α-ն, որ c' և b-ն հատվող ուղիղները են, ապա ... հակասում է այն ... , որ $c' \parallel b$ ⇒ $c' \in \alpha$
M կետով անցնող ու բոլոր ուղիղները են ընկած α հարթության մեջ:

Խնդիր 8

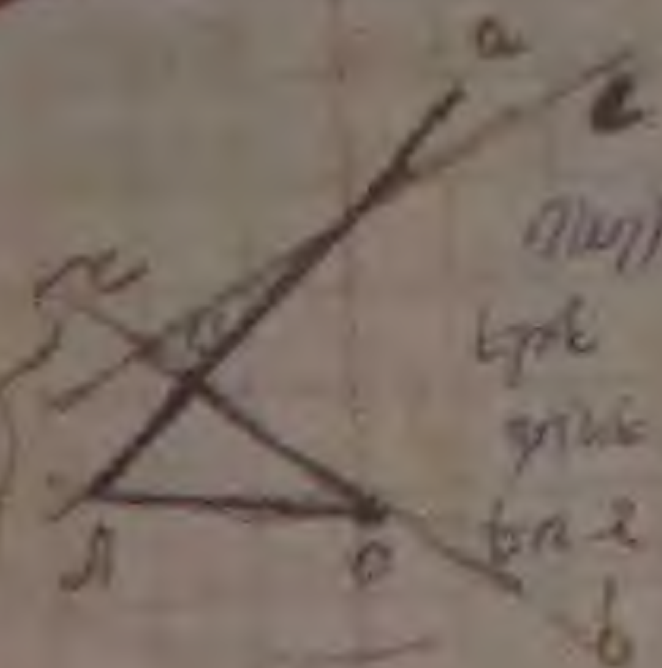
Երե զուգահեռ ուղիղներից մեկը ընկած է մի հարթության մեջ, ապա զուգահեռներից մյուսը կամ ընկած է այդ հարթության մեջ, կամ եթե զուգահեռներից մեկը ... ընկած է հարթության մեջ, ապա զուգահեռներից ընկած է այդ հարթության մեջ:



Խնդիր 9
$A \in \alpha$, $B \in \alpha$ և $O \in \alpha$

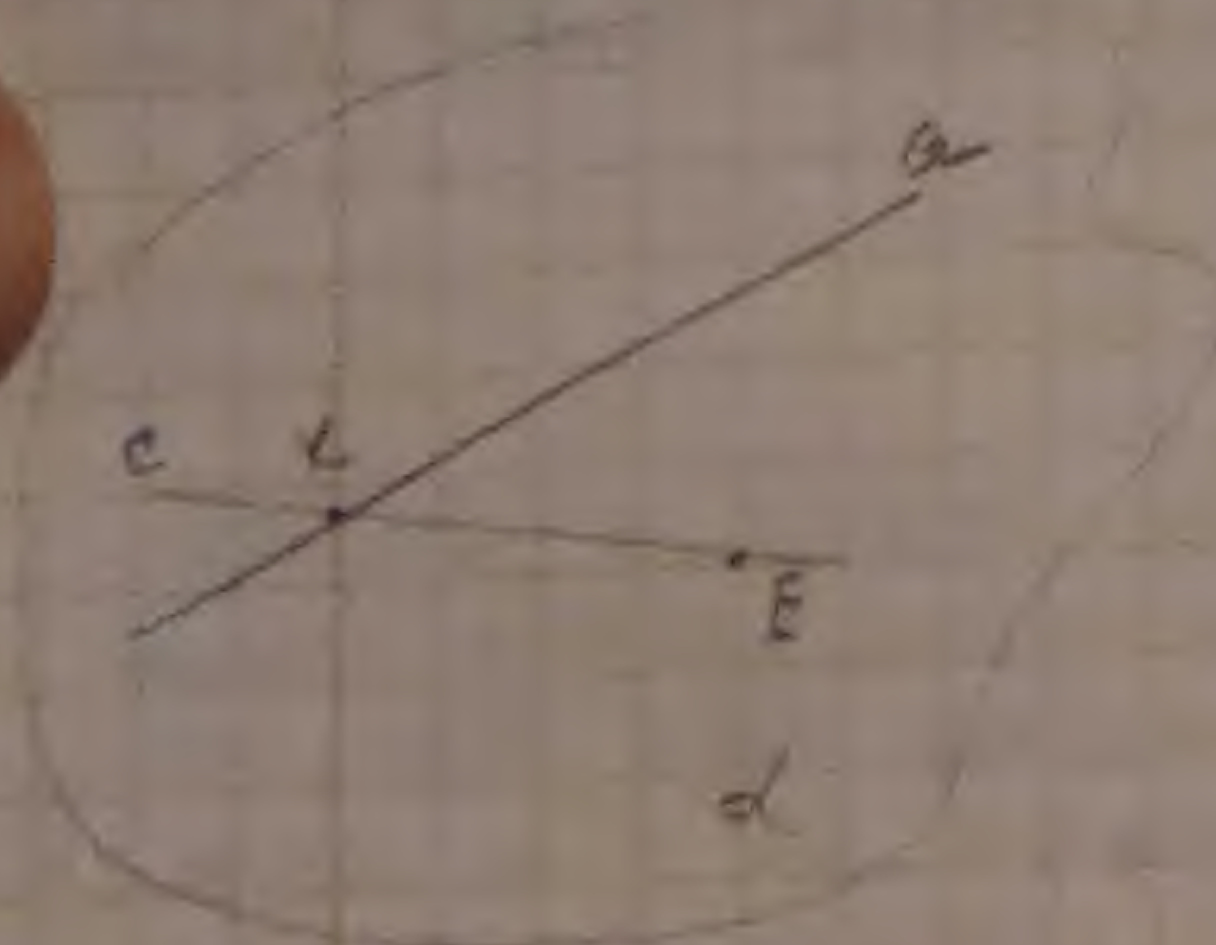
Ցույց որ $C \in \alpha$; $D \in \alpha$
(B, O, D)
Քանի որ A-ն և O-ն ընկած
են պատկանում α հարթության մեջ, ապա AO $\left(\frac{AC}{BO}\right)$ ուղիղը նույնպես C-ն ... O, որ AO ուղիղը պատկանում C-ն (BO-ին) պատկանում B-ն ընկած է α հարթության մեջ, հետևաբար
$C \in \alpha$ և $D \in \alpha$:

Խնդիր 10



Ապացուցել [illegible] x [illegible] հարթությանը մեկ երբ [illegible] հատում x եռանկյան կողմերը [illegible] [illegible] : Ապացուցել բոլոր [illegible] ուղիղը [illegible] [illegible] հարթության մեջ

Խնդիր 11



ուղիղը
Ապացուցել [illegible] և [illegible] [illegible] հատվող x հարթությունը, [illegible] [illegible] է, որ [illegible] [illegible] [illegible] և [illegible] ուղիղը [illegible] [illegible] [illegible] ուղիղ ընկած է այդ հարթության մեջ (եթե որ C ուղղի [illegible] [illegible] E-ն և O ուղղի [illegible] [illegible] H-ն ընկած են α հարթության մեջ

Խնդիր 12

Եթե A, B, C և D հարթությունները ընկած չեն մի հարթության մեջ, ապա ABC և ABD հարթությունները հատվում են AB ուղղով

Խնդիր 13

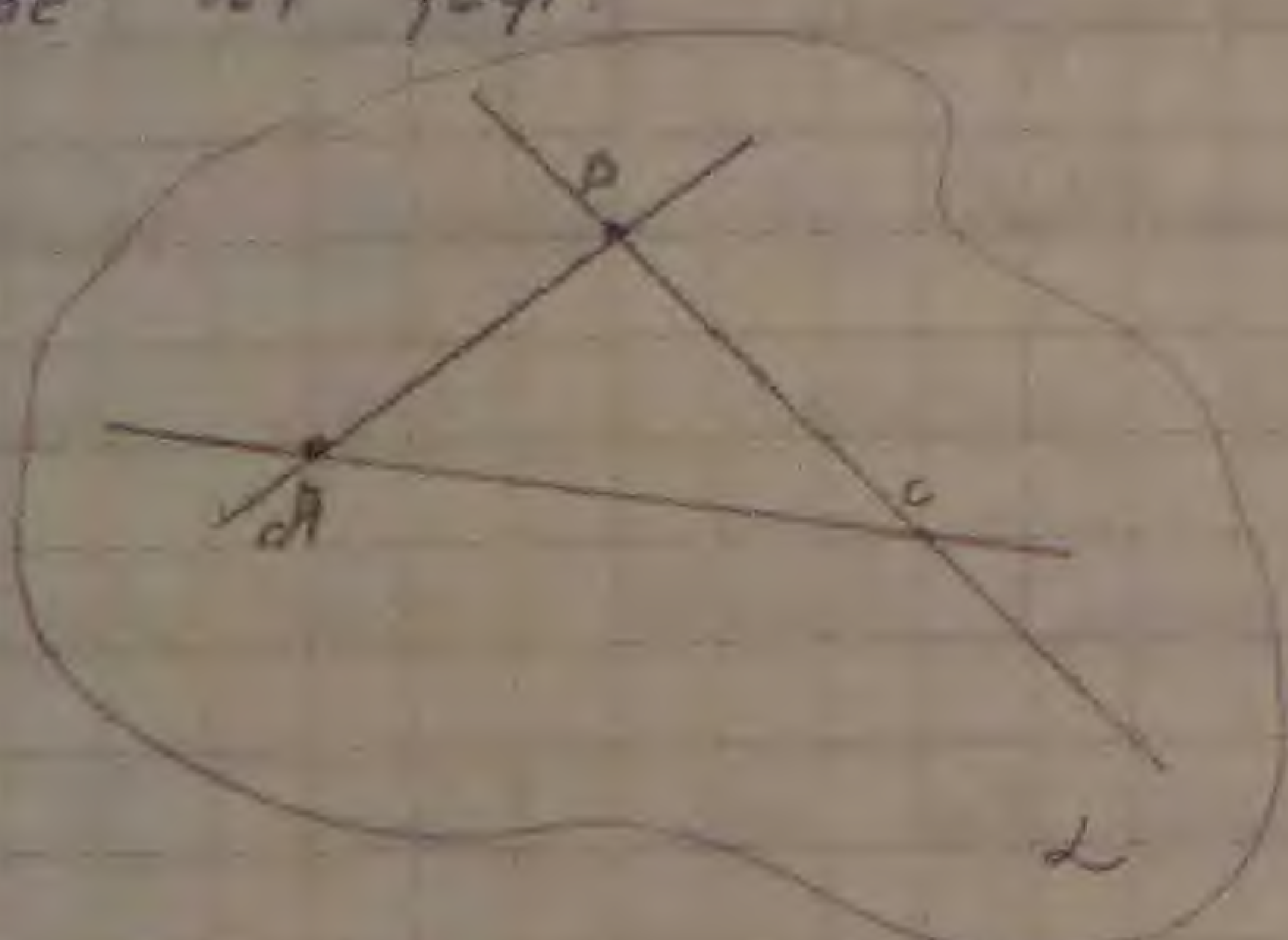
Ա-3 Եթե երկու հարթություններ ունեն ընդհանուր կետ, ապա դրանք ունեն ընդհանուր ուղիղ, որում այդ ուղղի վրա են գտնվում այդ հարթությունների բոլոր ընդհանուր կետերը:

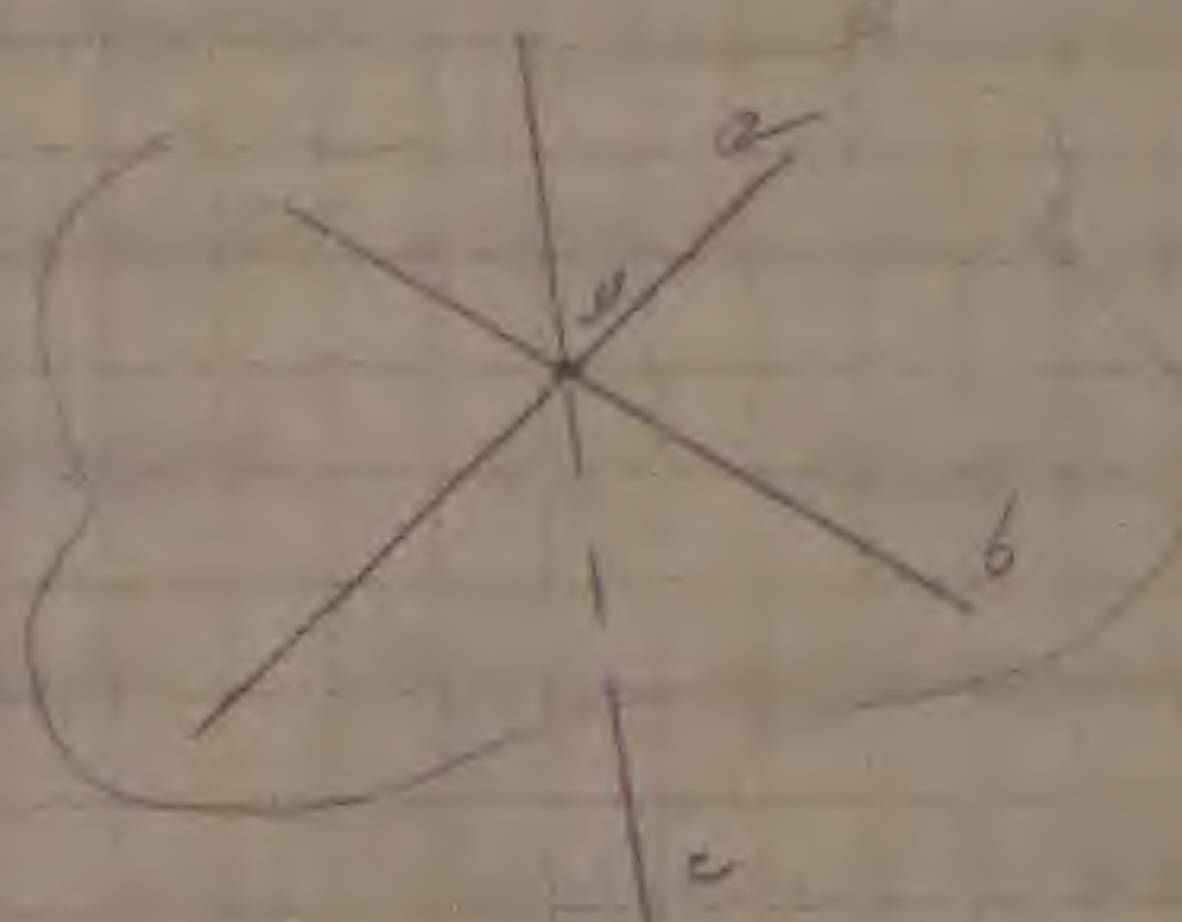
Խնդիր 14

Երեք գծված M կետով անցնում են երեք՝ a, b և c ուղիղներ, որոնցից յուրաքանչյուր երկուսով անցնում է մեկ հարթություն, քանի ընդամենը անցնում է 3 հարթություն:

Խնդիր 15

Երեք ուղիղներ զույգ առ զույգ հատվում են: Քանի ուղիղները չեն հատվում երեք կետում, ապա նրանք ընկած են մեկ հարթության մեջ, իսկ եթե մեկ կետ:





Երկնիստ անկյուն

Հարթությունների ուղղահայացությունը

1. Երկնիստ անկյուն: Հարթության մեջ անկյունը անվանել էինք, որպես մի կետից ելնող երկու ճառագայթներից կազմված պատկեր. Տարածության մեջ անկյանը նման դիտարկվում է նաև երկնիստ անկյունը: Որպեսզի պատկերացնենք, թե ինչպես է առաջանում երկնիստ անկյունը, օգտվենք այն ակնհայտից, որ յուրաքանչյուր ուղիղ հարթությունը բաժանում է երկու կիսահարթությունների, եթե վերցրած թուղթը ծալենք ուղիղ գծով, ապա կառաջանան երկու մասեր: Եթե այդ մասերը ընդունենք որպես կիսահարթություններ, և համարենք որ ընկած չեն միևնույն հարթության մեջ, ապա արդյունքում կստանանք երկնիստ անկյուն:

Սահմանում: Երկնիստ անկյուն կոչվում է այն պատկերը, որը կազմված է երկու կիսահարթություններից և a ուղղից, որոնց a-ն ընդհանուր եզր է, և կիսահարթությունները ընկած չեն միևնույն հարթության մեջ:

Կիսահարթությունները կոչվում են երկնիստ անկյան նիստեր (այսուհետ կօգտագործենք «երկնիստ անկյուն» անվանումը), իսկ a ուղիղը՝ նրա կող: Երկնիստ անկյան աստիճանային չափը ո-

ուղիղը համար կոչվում է երկնիստ անկյան գծային անկյուն

հանդիսացողությունը: Եթե $\angle AB\beta$ երկնիստ անկյան կողի վրա նշենք

կամայական որևէ K կետ և յուրաքանչյուր նիստում տա-

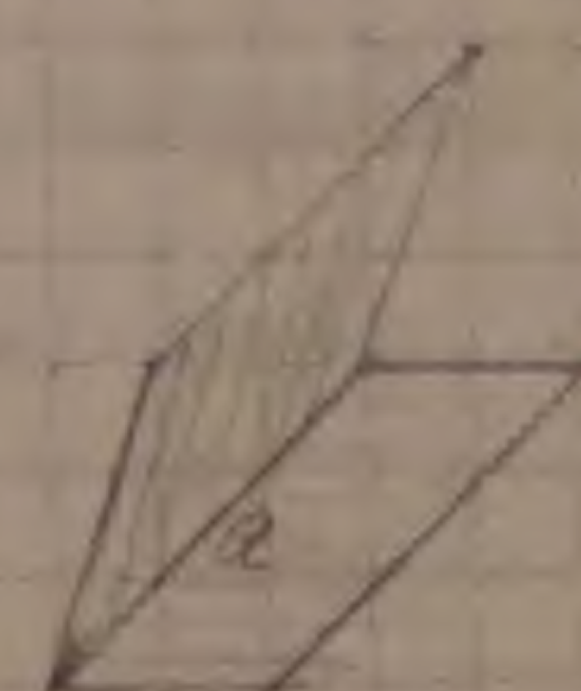
նենք K կետով անցնող և AB կողին ուղղահայաց CK (α-ում)

և (KK' β հարթ-ում) ուղիղները, ապա ստացված CDK անկյու-

նը $\angle AB\beta$ երկնիստ անկյան գծային անկյունն է: Երկ-

նիստ անկյունը չափվում է իր գծային անկյունով:

ա)

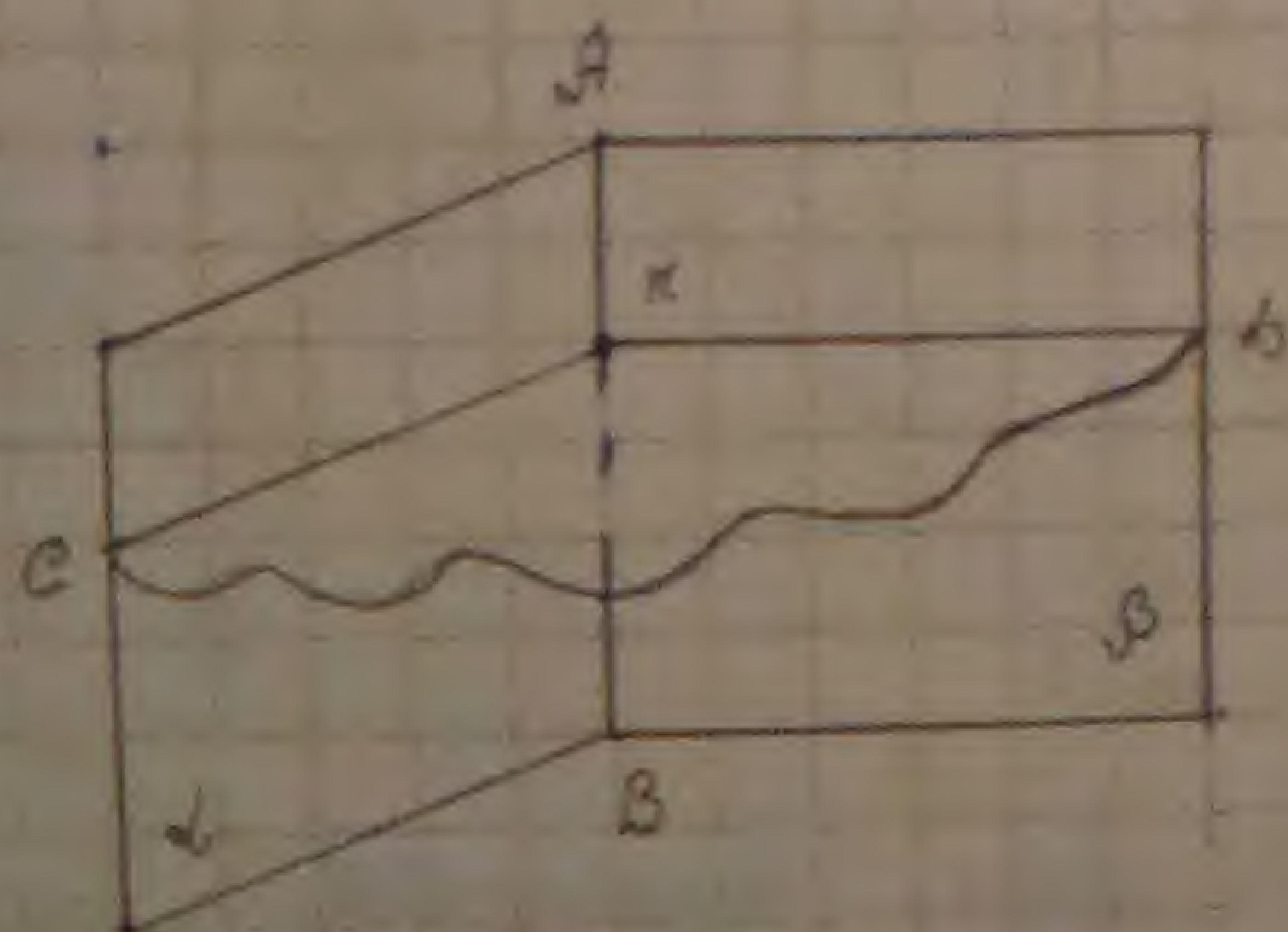


բ) Երկնիստ անկյուն

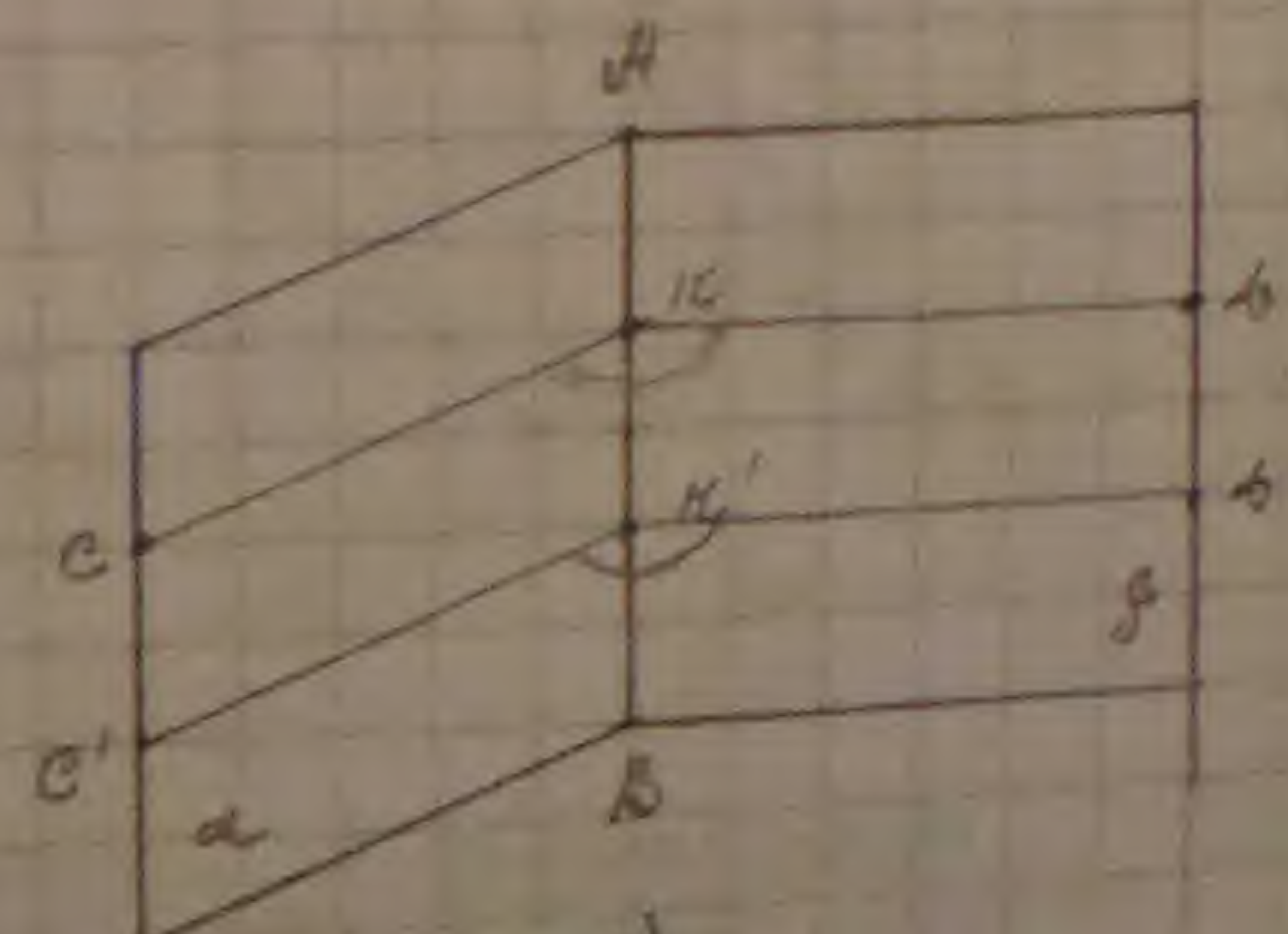
Հարթությունը ուղղով հատվելիս

բաժանվում է երկու կիսահարթությունների

Նկ 1.



ա)



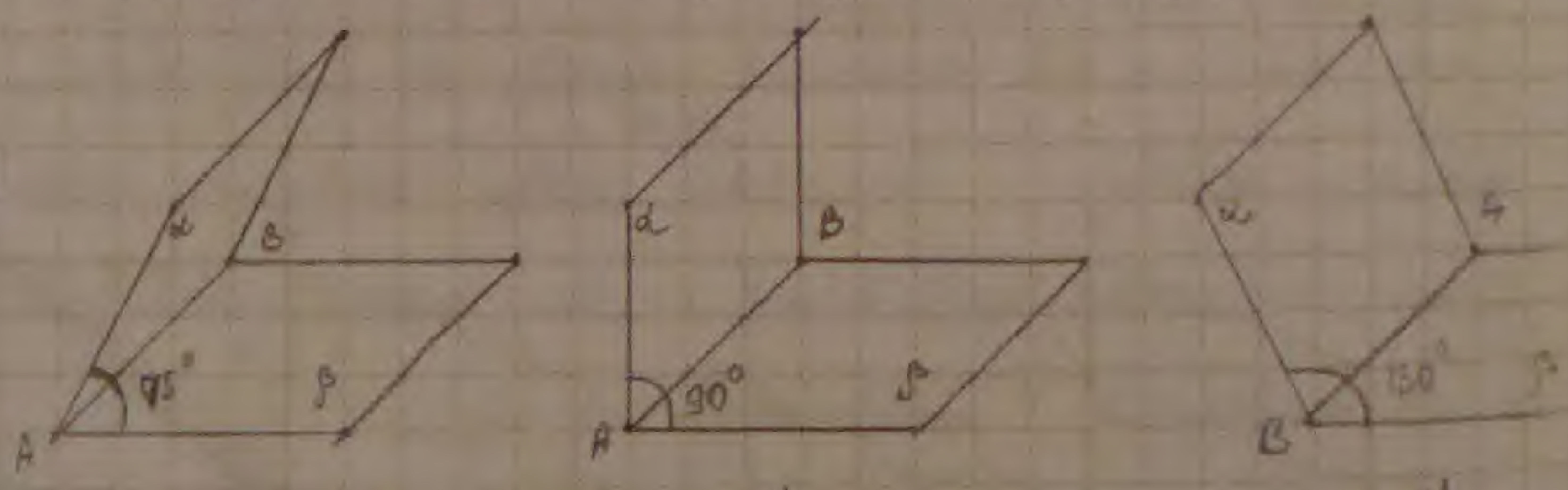
բ)

Երկնիստ անկյան գծային անկյուն

Նկ 2.

Երկնիստ անկյան բոլոր գծային անկյունները իրար հավասար են:
CKD գծային անկյան հետ դիտարկենք ~~մեկ ուրիշ~~ ∠AB? երկ-
նիստ անկյան մեկ ուրիշ՝ C'K'D' գծային անկյունը: Քանի որ,
համաձայն գծային անկյան սահմանման $CK \perp AB$, $C'K' \perp AB$
և $CK \subset \alpha$, $C'K' \subset \alpha$, ապա հետևյալ β-ն համաձայն երկու ուղիղներ,
որոնք ուղղահայաց են երրորդին չեն հատվում՝ զուգահեռ են,
$CK \parallel C'K'$: Նույն ձևով ապ. է, որ $KD \parallel K'D' \Rightarrow \angle CKD = \angle C'K'D'$
(համաձայն համուղղված կողմերով անկյունների թ-մի, այն է՝
համուղղված կողմերով անկյունները միմյանց հավասար են):
(Գծ.2 բ):

Երկնիստ անկյունը կարող է լինել սուր, ուղիղ և բութ (Գծ.3)



ա) բ) գ)
Գծ. 3

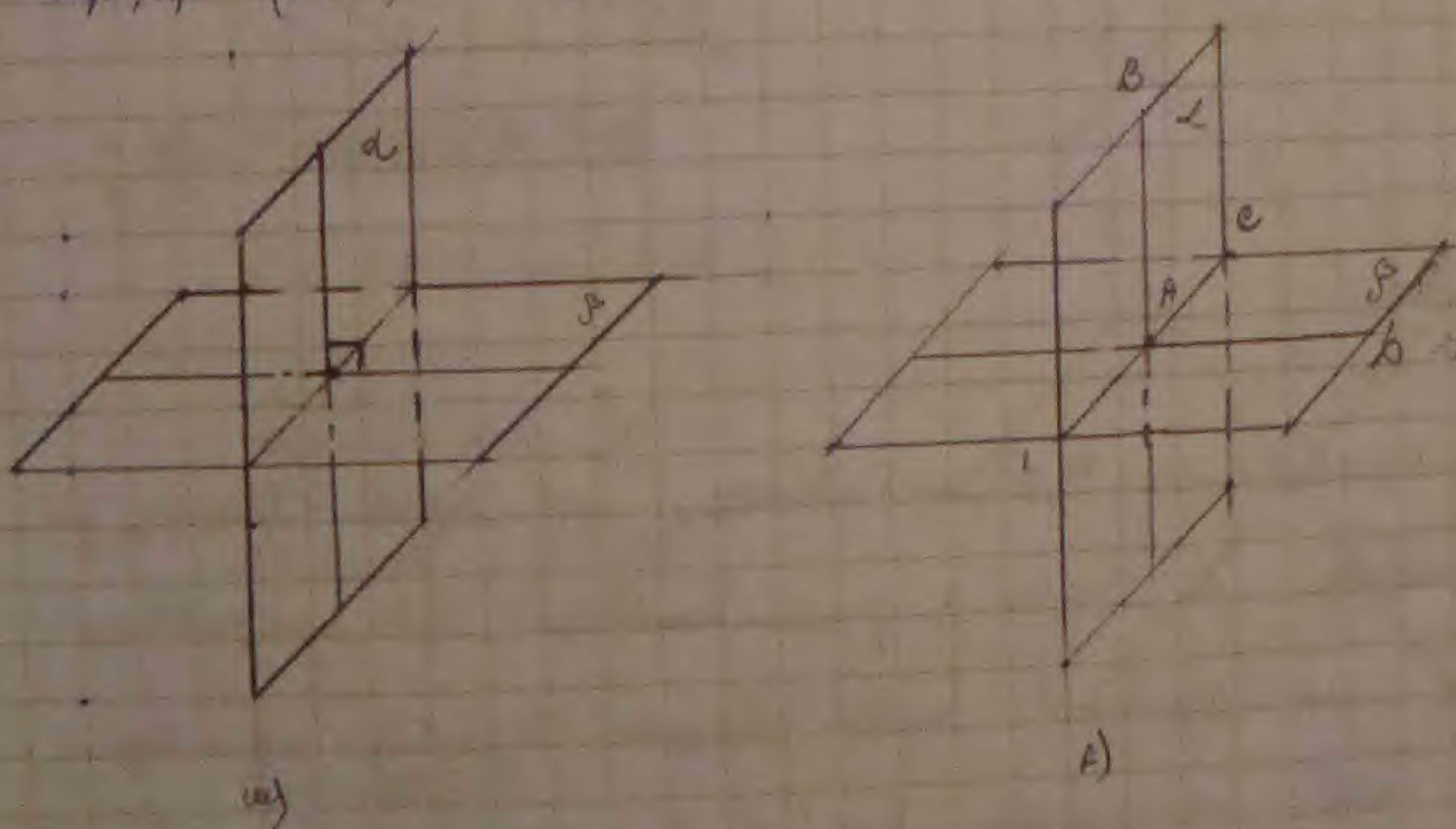
... Երկու հարթություններ հատվելիս
առաջացնում են 4 երկնիստ անկյուններ: Այն երկնիստ անկյունը,
որը ... չէ ... , կոչ-
վում է հատվող հարթությունների կազմած անկյուն ($0 < \varphi \le 90°$)

Սահմանում: Երկու հարթություններ կոչվում են ուղղահայաց (փոխուղղահայաց), եթե դրանց կազմած անկյունը 90° է (նկ. 5):

Ձևակերպենք ուղղահայաց հարթությունների հայտանիշը:

Թ-Տ: Եթե երկու հարթություններից մեկն անցնում է մյուս ~~հրթ~~ ու հարթությանը ուղղահայաց ուղղով, ապա այդ հարթ-ները ուղղահայաց են:

Ապացույց: Դիցուք α հարթությունը անցնում է β հարթությանը ուղղահայաց AB ուղղով և β-ն հատում է AC ուղղով: Ապ., որ (αACβ) α ⊥ β:



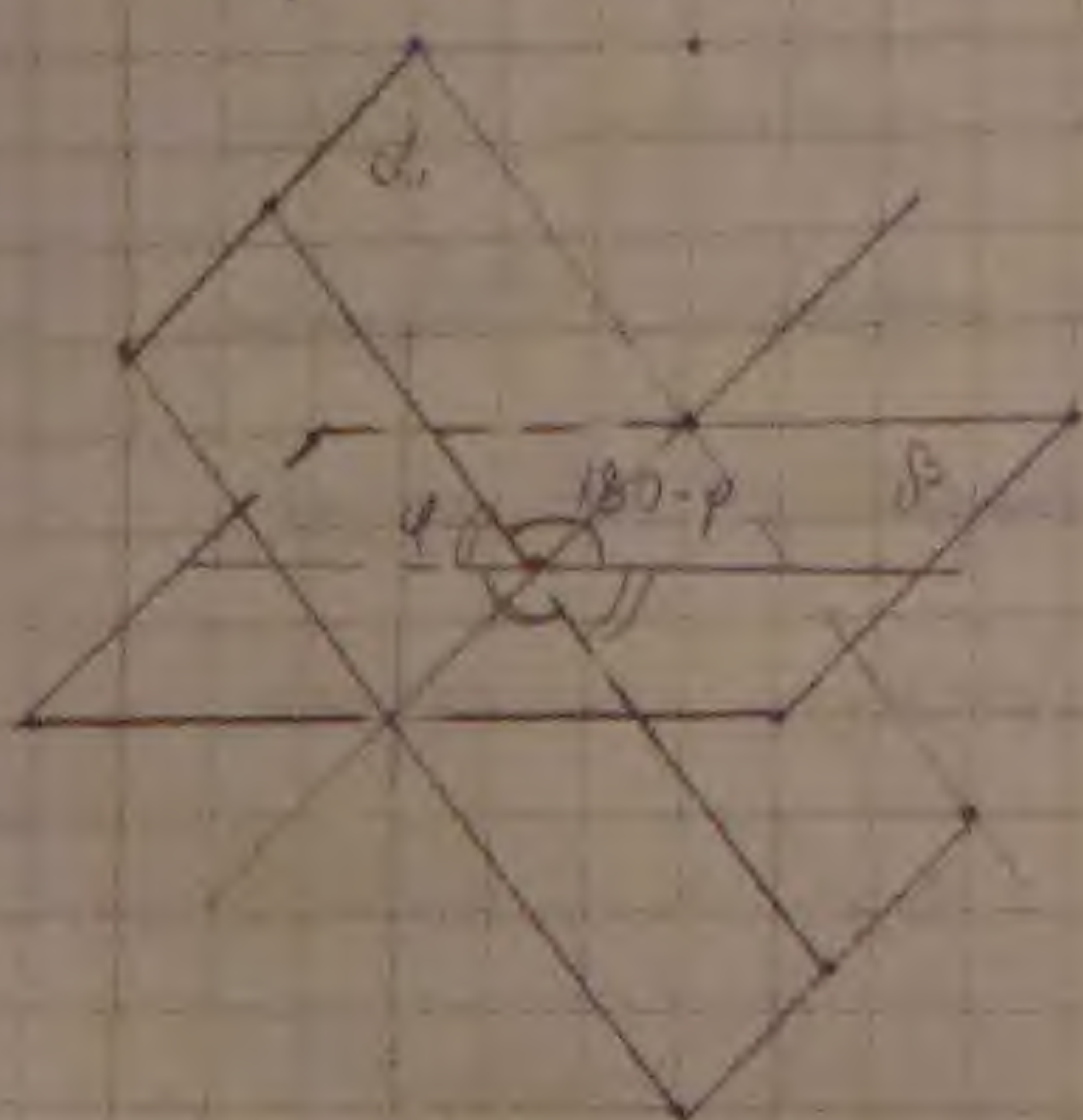
նկ. 4

$\left.\begin{matrix} AB \perp AC \\ Ab \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle BAb$ — $\alpha AC\beta$ երկնիստ անկյան գծային անկյունն է

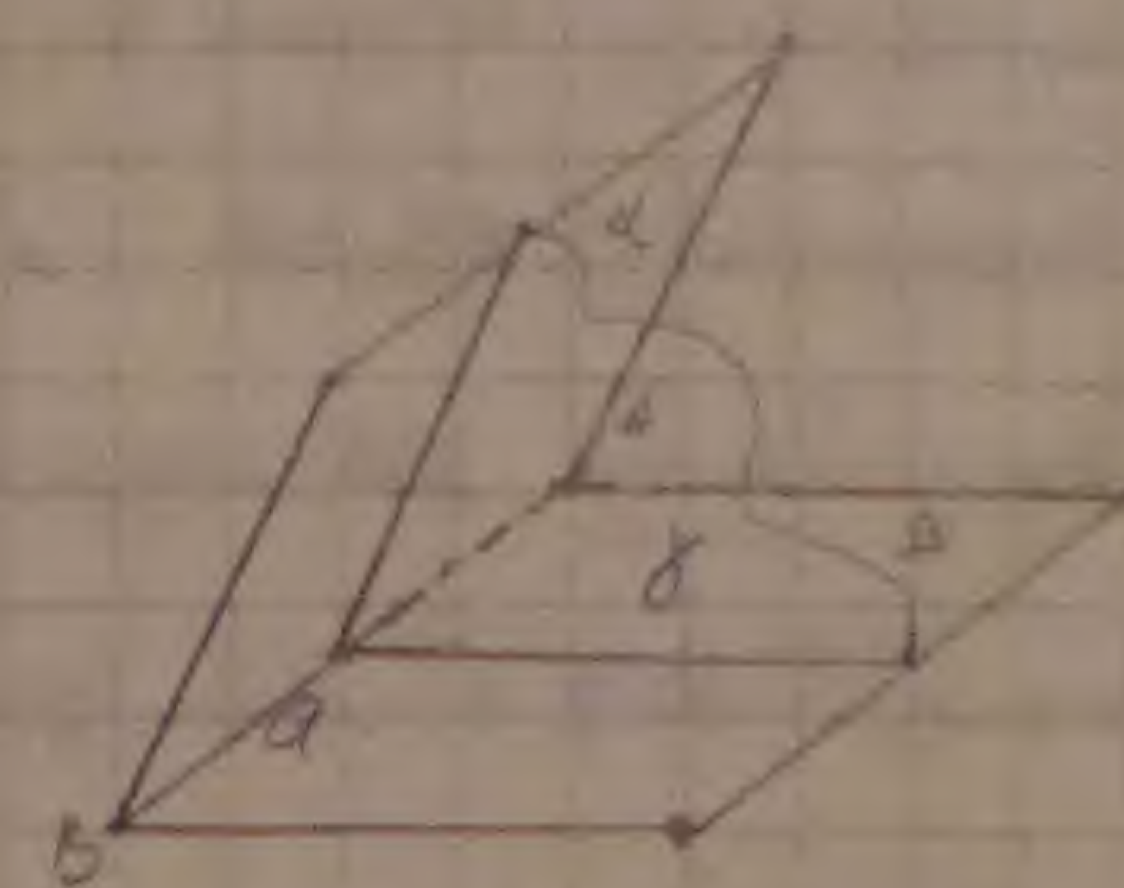
$AB \perp \beta \Rightarrow$, որ AB-ն $\perp$ է β-ի ցանկացած ուղղին $\Rightarrow AB \perp Ab \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BAb = 90° \Rightarrow \alpha \perp \beta$

Հետևանք: Միմյանց հատվող հարթությունների հատման գծին ուղղահայաց հարթությունը ուղղահայաց այդ հարթություններից յուրաքանչյուրին:

Երբ հատվող հարթություններից որևէ մի երկնիստ անկյունը φ է, ապա մյուս երեք երկնիստ անկյունները են $180-\varphi$, φ, $180-\varphi$.



ա)



Երբ $\gamma \perp \alpha$, ապա $\beta \perp \alpha$, $\beta \perp \gamma$

Ուղղանկյունանիստեր: Այն բազմանիստը, որի բոլոր նիստերը զուգահեռագծեր են կոչվում է զուգահեռանիստ: Այն զուգահեռանիստը, որի կողմնային կողերը ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը, կոչվում է ուղիղ զուգահեռանիստ: Ուղիղ զուգահեռանիստի կողմնային նիստերը, որոնք φ-ն, ուղղանկյուններ են, իսկ հիմքերը կամայական զուգահեռագծեր: Բացառությամբ դեպքը, երբ ուղիղ զուգահեռանիստի հիմքերը ուղղանկյուններ են, ապա այն կոչվում է ուղղանկյուն

զուգահեռանիստը, կոչվում է ուղղանկյունանիստ:

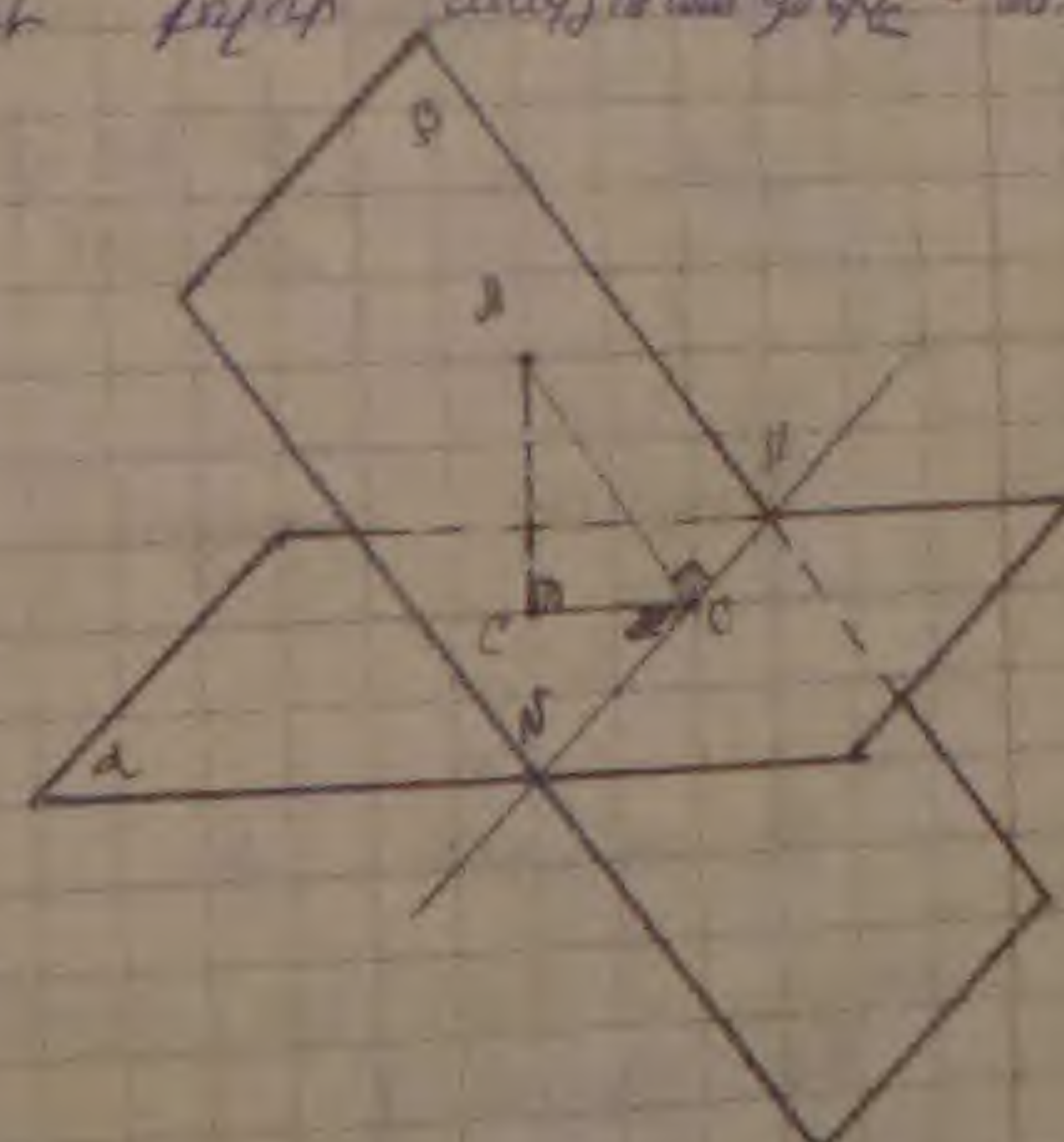
1°. Ուղղանկյունանիստի բոլոր նիստերը ուղղանկյուններ են:

2°. Ուղղանկյունանիստի երկնիստ անկյունները ուղիղ են:

(Ուղղանկյուն զուգահեռանիստի մեկ նիստի հանդիպակաց կողմերով կազմված երկնիստ անկյունը ուղիղ է զուգահեռանիստի երկնիստ անկյունը) :

3°. Թ.Տ. Ուղղանկյունանիստի անկյունագծի քառակուսին = 3 չափումների քառակուսիների գումարին:

Հետևանք: Ուղղանկյունանիստի բոլոր անկյունագծերը = են:



166. Տրված է

α-ն և β-ն հարթություններ են

$\alpha \perp \beta$

Հատվում են MN-ով

$A \in \beta$

$AB \perp MN$, $B \in MN$

$AC \perp \alpha$, $C \in \alpha$

Ապ. որ $\angle ABC$-ն $AMNC$-ի

գծ. անկյունն է

$\left.\begin{array}{l}AB\text{-ն } \alpha\text{-ի նկատմամբ թեք է} \\ AC\text{-ն ուղիղ } \alpha\text{-ին ուղղահայաց է}\end{array}\right\} \Rightarrow CB$-ն AB թեքի պրոյեկցիան է,

Ըստ հ.ո.թ. եթե $MN \perp AB$, ապա $MN \perp CB$: Ստացվում

ստացանք, որ $AB \perp MN$ և $CB \perp MN \Rightarrow \angle ABC$-ն $AMNC$

Երկնիստ անկյան երկնիստ անկյան գծային անկյունն է:

167. Տրված է

$SABC$ քառանիստ

$AB = BC = AC = AS = BS = CS = a$

$AM = MC$

Ցույց տալ որ $\angle SMB$-ն $SACB$-ի գծ. անկյունն է:

Ապ. ΔASC-ն

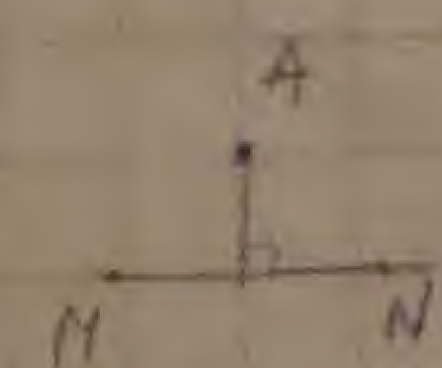
Քանի որ $\begin{cases} AS = AC = SC = a \\ AM = MC \end{cases}$ ապա, որ $SM \perp AC$

Ապ. է. ΔABC-ն

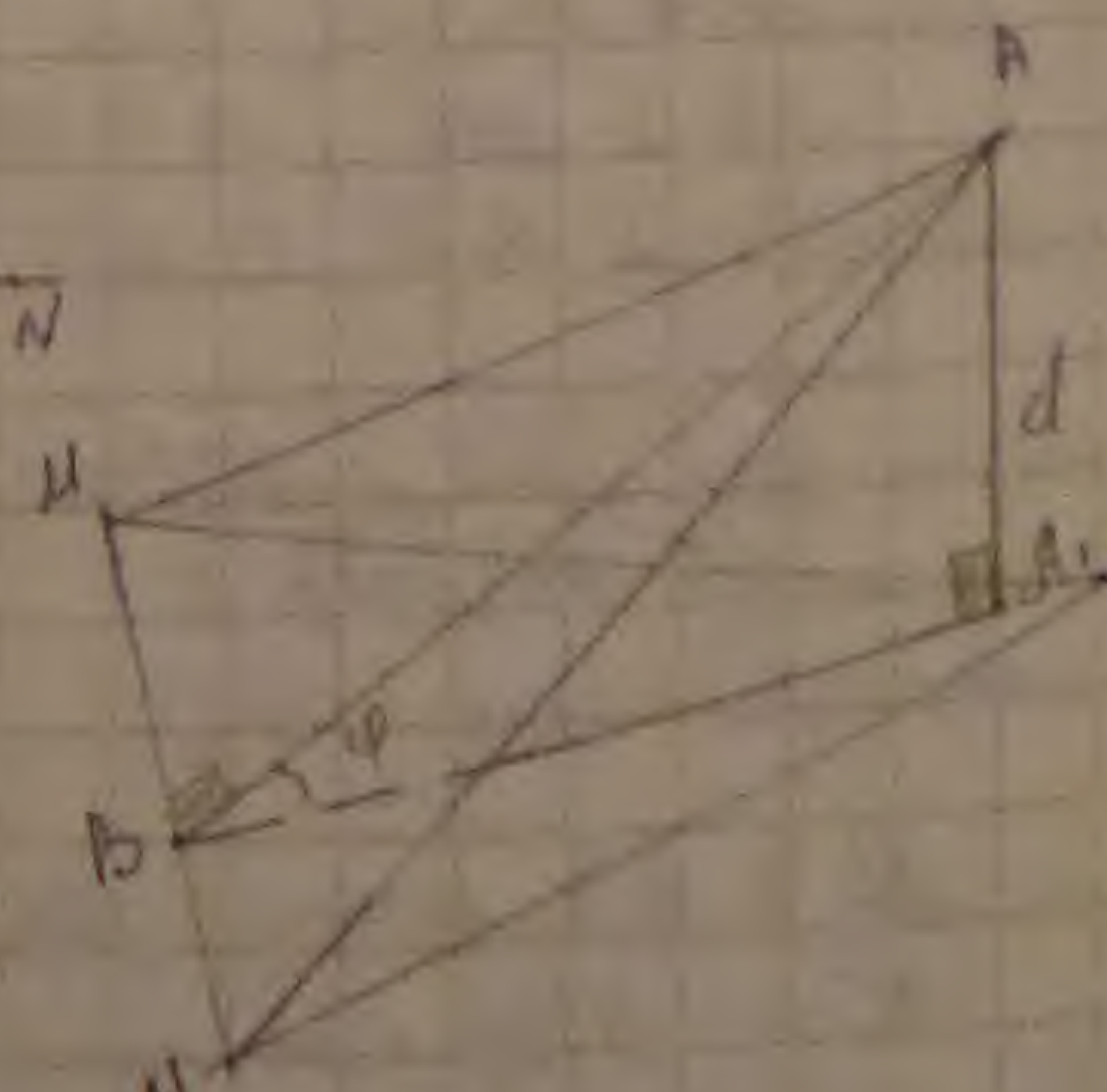
Քանի որ $\begin{cases} AB = BC = AC = a \\ AM = MC \end{cases}$ ապա, որ $AM \perp AC$

Այսպիսով ստացանք, որ $\begin{cases} SM \perp AC \\ BM \perp AC \end{cases}$ ապա, որ SMB-ն ΔABC-ի

գծ. անկյունն է:



168. Տրված է



$\angle AMNA_1 = \varphi$

$A \in MNA$

MN-ը $AMNA_1$-ի կողն է

$AA_1 \perp MNA_1$

$AB \perp MN$

AB - ?

Քանի որ $AB \perp MN$, AB-ն MNA_1-ի ... $AA_1 \perp$ ... $AA_1 \perp MNA_1$ $\Big\}$ $\Rightarrow BA_1$-ը

AB թեքի պրոյեկցիան է, ք-ից որ $MN \perp AB$, ապա $MN \perp A_1B$ ⇒ ...

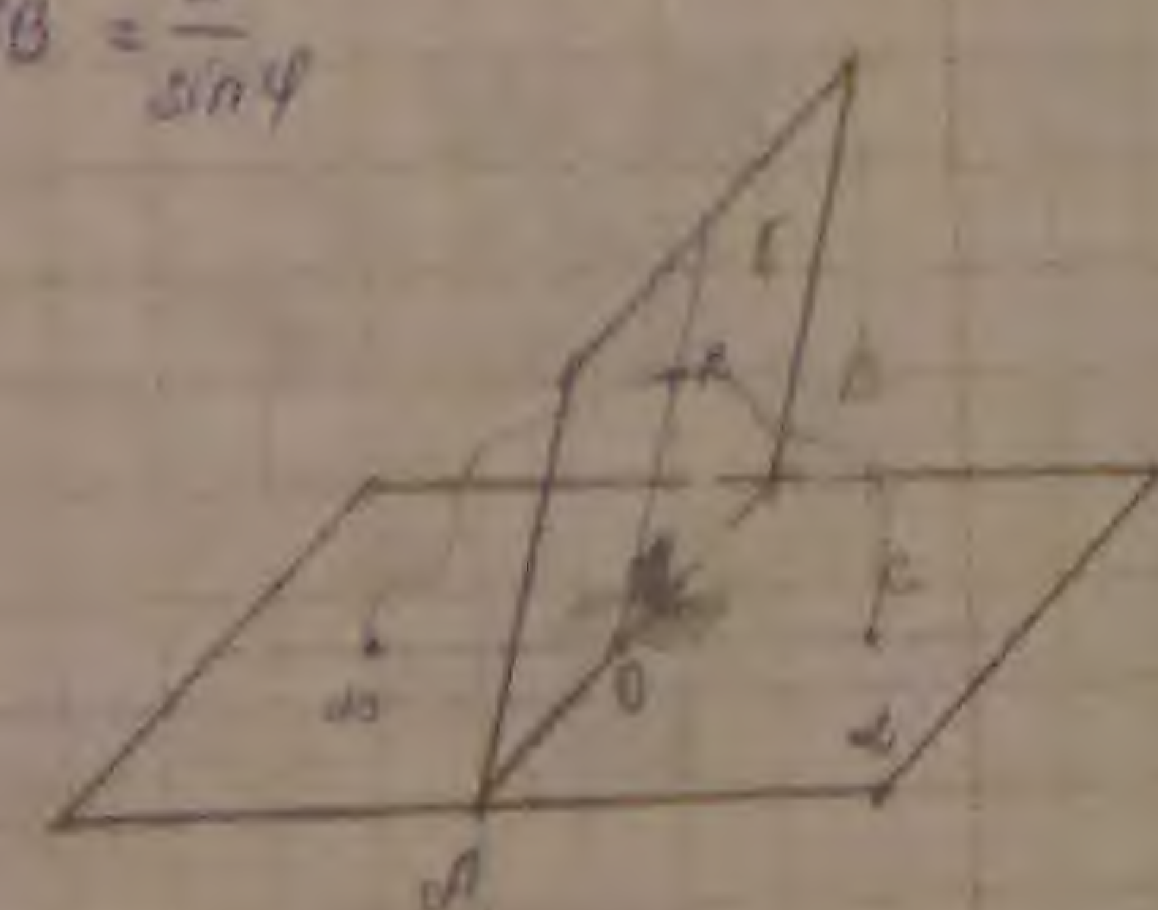
$\Rightarrow \left.\begin{matrix} AB \perp MN \\ A_1B \perp MN \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle ABA_1$-ը $AMNA_1$-ի գծ. անկյունն է և $\angle ABA_1 = \varphi$

Դիտ. է ΔABA_1-ը

ΔBA_1-ը ուղղ. եռ. է՝ $AA_1 \perp A_1B$ ($AA_1 \perp MNA_1 \Rightarrow AA_1 \perp$ ... MNA_1 հարթության ցանկացած ուղղի)) որտեղ $AA_1 = d$, $\angle ABA_1 = \varphi$ ⇒

$\Rightarrow AB = \dfrac{d}{\sin\varphi}$

Պատ.՝ $AB = \dfrac{d}{\sin\varphi}$



169. Տրված է

$\angle AB\delta$ և $\angle AB\gamma$ երկնիստ անկյուններ

δ ... γ

d-ն և β-ն ...

Ապ. որ $\angle AB\delta + \angle AB\gamma = 180°$

... AB կողը O կետում ... , այդ կողին ուղղահայաց

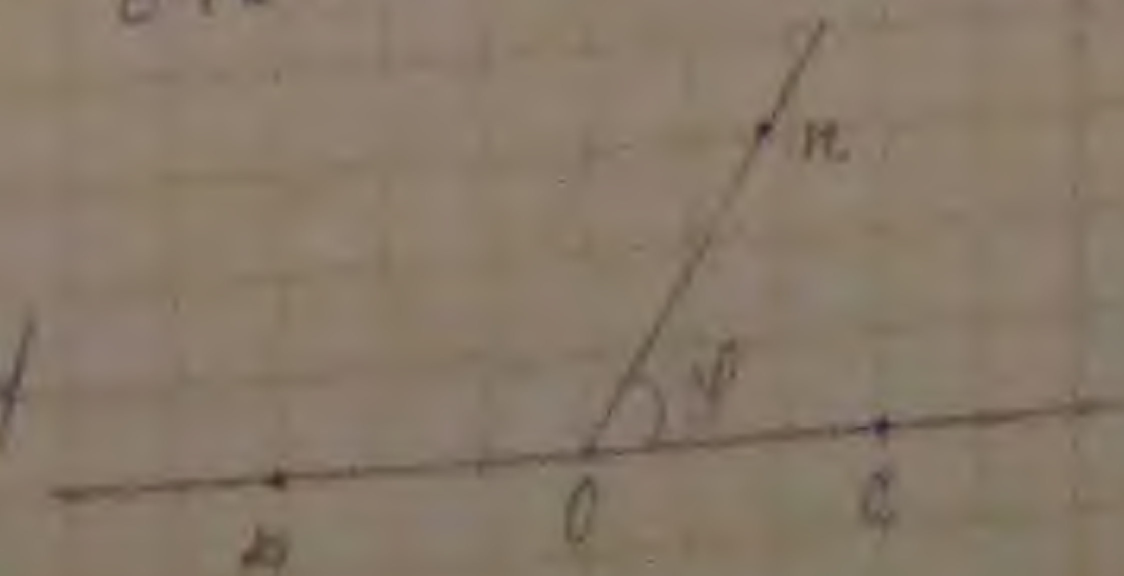
և d հարթության մեջ ... OD ... γ հարթության մեջ O

կետից ... AB-ին ուղղահայաց OK ... KOC-ն $\angle ABd$-ի,

իսկ DOK-ն $\angle AB\delta$-ի գծ. անկյունն է

... DC ուղիղ և K կետով

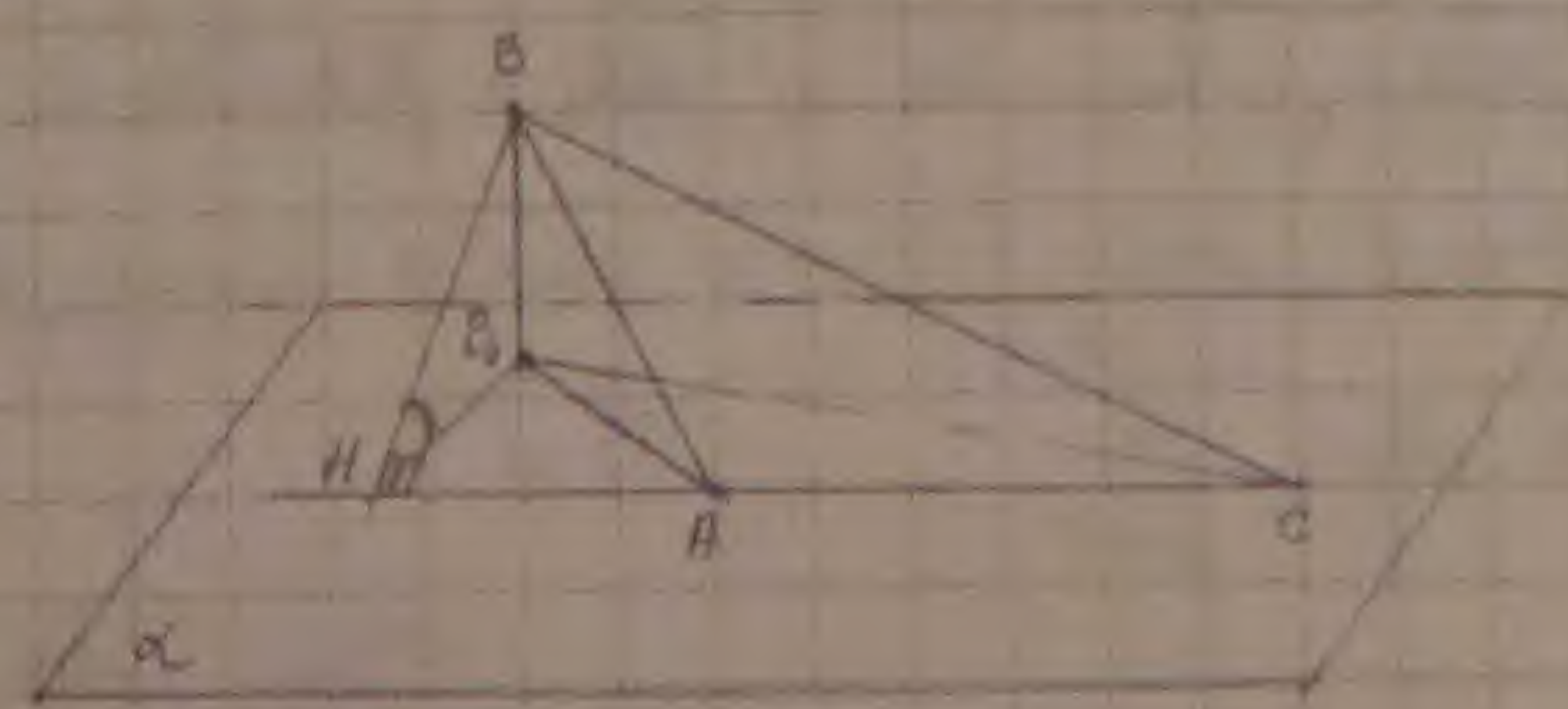
անցնող β հարթությունը



Երբ $\angle HOC$ եղ. φ-ով, ապա $\angle HOB = 180 - \varphi$:

Հետևաբար, երբ երկու երկնիստ անկյունների մի զույգ կողմ-
երը ..., իսկ մյուս կողմերը ... չեն
պատկանում ..., ապա երկնիստ անկյունների գումարը 180° է.

170. Տրված է



$AC \in \alpha$

$BB_1 \perp \alpha$

$BH \perp AC$

$AB = 2$ սմ

$\angle BAC = 150^\circ$

$BACB_1 = 45^\circ$

BH և BB_1 - ?

$\left.\begin{array}{l} BH\text{-ը } \alpha\text{-ն հատող թեք է} \\ BB_1 \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow HB_1$-ը HB-ի պրոյեկցիան է ⇒

⇒ Երբ $AC \perp BH \Rightarrow AC \perp HB_1 \Rightarrow \angle BHB_1$-ը $BACB_1$-ի գծ. անկյունն է և $\angle BHB_1 = 45^\circ$.

Երբ $\angle BAC = 150^\circ \Rightarrow \angle HAB = 30^\circ$

Դիտ. է ΔHBA-ն

HBA ուղղ-ն եռ. մեջ $AB = 2$ սմ,

$\angle BAH = 30^\circ \Rightarrow HB = 1$ սմ

Դիտ. է․ ΔHBB_1-ը:

HBB_1 ուղղ. եռ. մեջ HB ներքնաձիգը 1 սմ է, $\angle BHB_1 = 45^\circ \Rightarrow BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

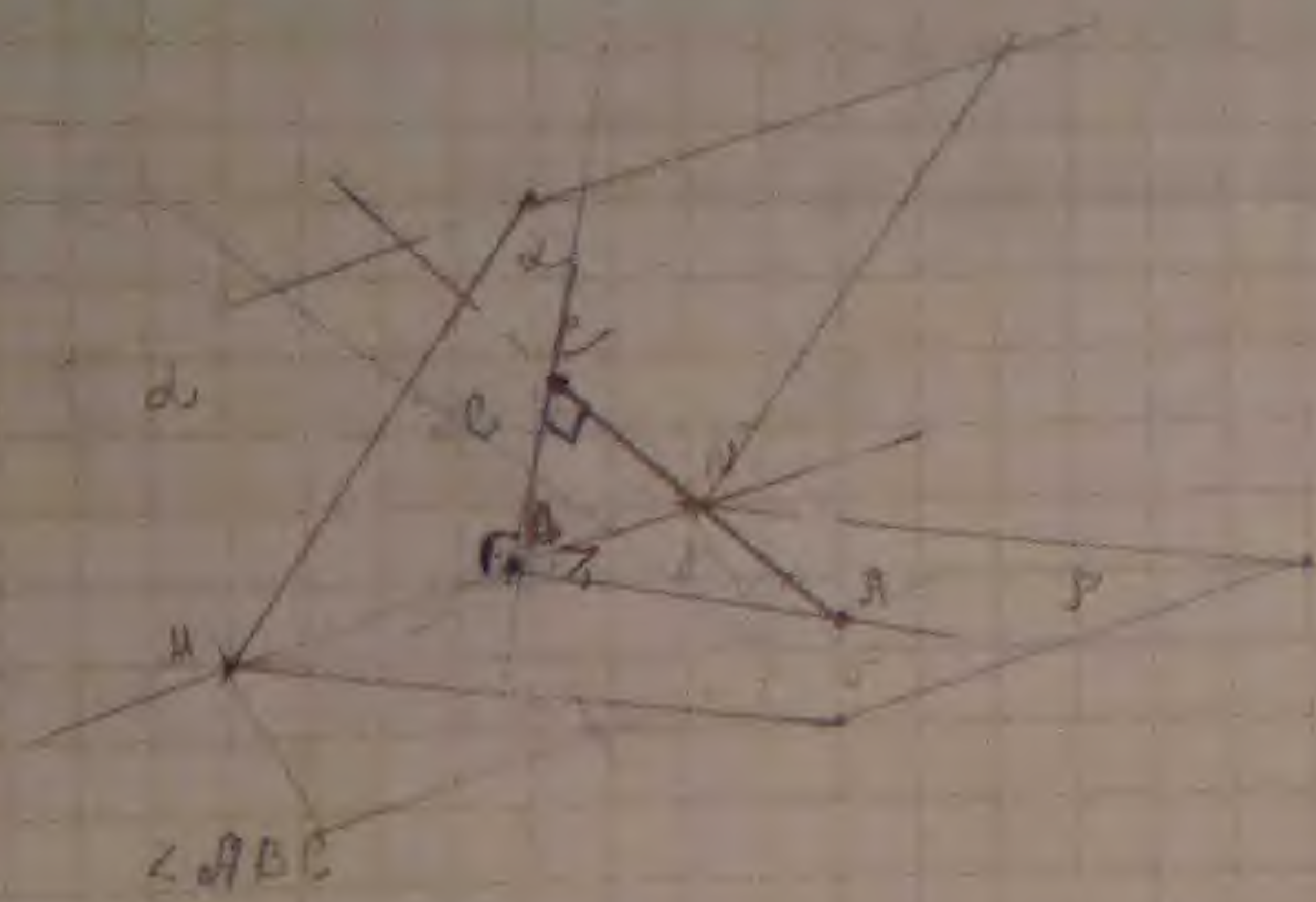
Պատ․: $BH = 1$ և $BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\alpha = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha = 45^\circ$

166.



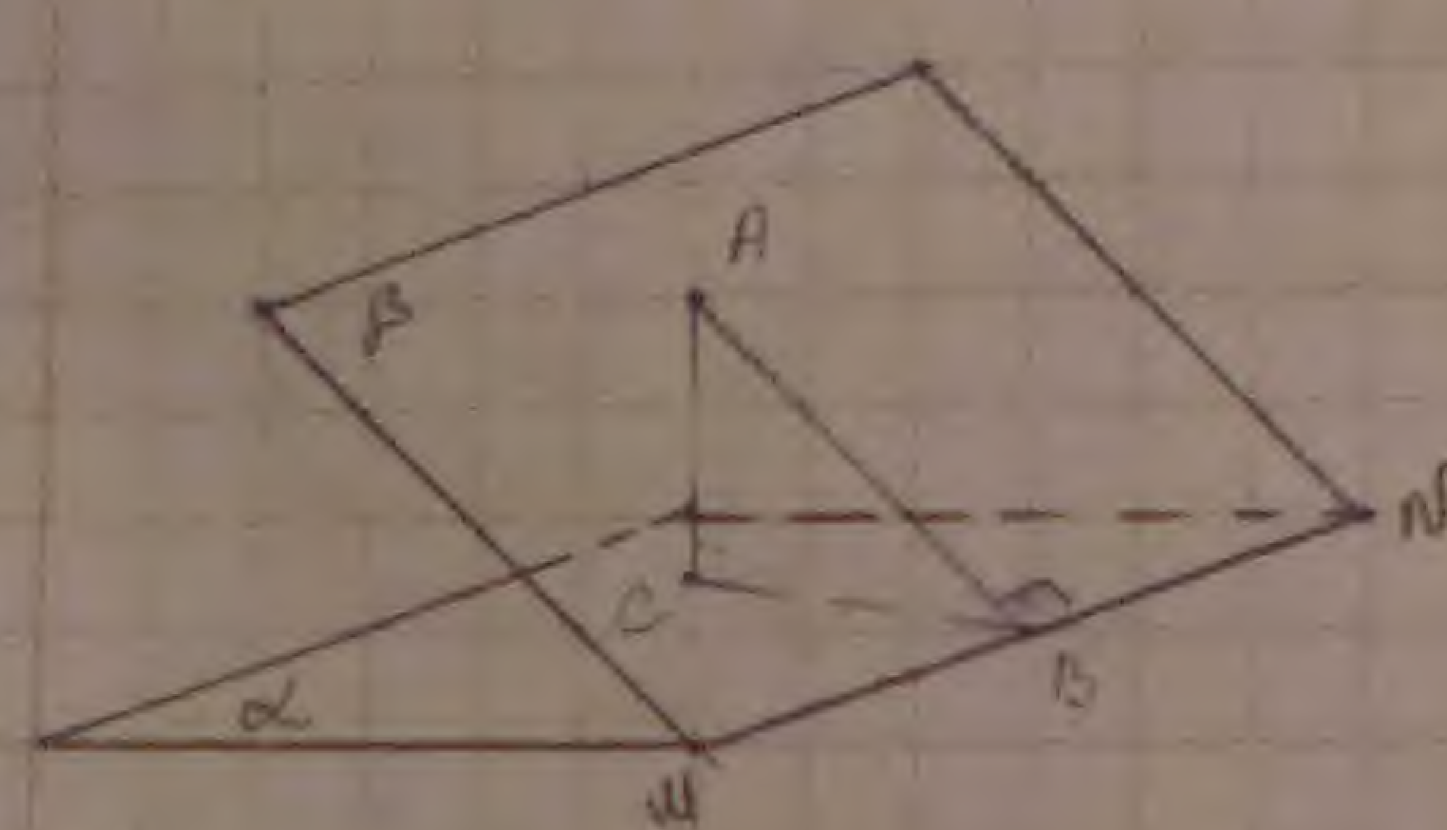
$AB \perp MN$

$AC \perp \alpha$

Ապաց. $\angle ABC$-ն $\alpha MN \beta$

երկ. -կ. գծ. -կյուն

166.



$A \in \beta$; $C \in \alpha$; $MN \in \beta \in \alpha$

$AC \perp \alpha$

$AB \perp MN$

Ապաց. որ $\angle ABC$-ն $AMNC$-ի գծ. անկ.

$\left.\begin{matrix} AB \perp MN \\ AC \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp MN$ (Եթե ուղիղը ուղղահայաց է թեքին հիմքով [և անցնում է նրա] ապա դա ուղղահայաց է նաև թեքի պրոյեկցիային

Ապացուցեցինք որ $CB \perp MN$, իսկ ըստ պայմանի $AB \perp MN \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CBA$-ն $AMNC$-ի գծային անկյունն է։

167.

$ABCD$-ն կանոնավոր քառանիստ է

$AM = MC$

Ապաց. որ $\angle AMB$-ն $ABCD$-ի գծ. անկյունն է

Հավասարասրուն է ΔAbC-ն

$Ab = bC = (AC)$, $AM = MC$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \boxed{bM \perp AC} \\ \angle AbM = \angle CbM \end{cases}$

Հավ. է ΔABC-ն

$AB = BC \neq (AC)$, $AM = MC$ $\Rightarrow BM \perp AC$

Ուրեմն $\begin{cases} BM \perp AC \\ bM \perp AC \end{cases} \Rightarrow \angle bMB$-ն $BACb$-ի գծ. անկյունն է

ΔMNC-ն երկնիստ անկյուն է | 168

$AC \perp \beta$ և $AC = d$

$AB \perp MN$

$\angle AB$ φ-ն երկնիստ անկյունն է

Գտնել

Հավասար ΔABC-ն

$AB \perp MN$, $AC \perp \beta$ $\Rightarrow BC \perp MN \Rightarrow \angle ABC = \varphi$

Ուրեմն $\begin{cases} \angle ABC = \varphi \\ AC = d \end{cases} \Rightarrow AB = \sin\varphi \cdot d.$

Պատ.՝ $AB = \sin\varphi \cdot d$

169

Տրված է

որ ∠αMNβ և ∠αMNγ երկնիստ անկ.

α - հարթ. կետ γ

β-ն և γ-ն իրենց լրաց. կիսահարթություններ են

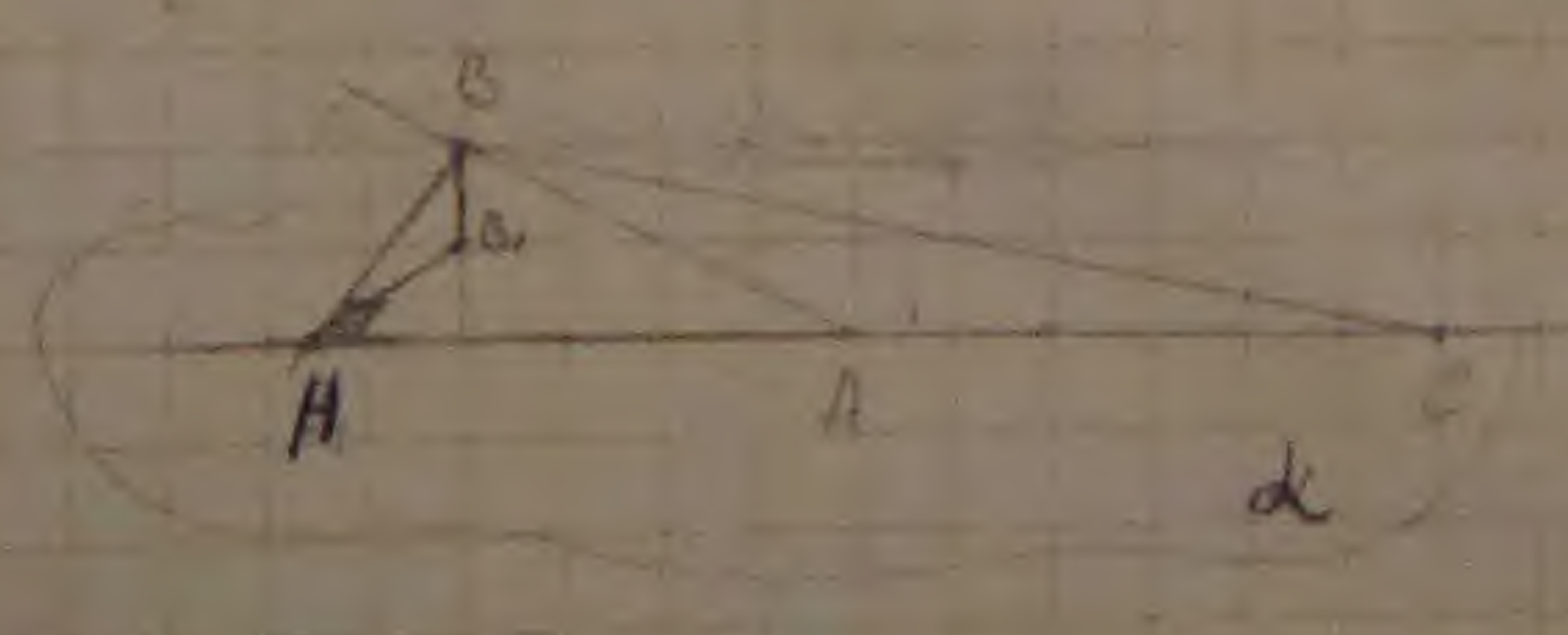
Ապ., որ ∠αMNβ + ∠αMNγ = 180°

α հարթության վրա վերցնենք MN-ին չպատկանող որևէ A կետ և այդ կետից MN-ին տանենք AH ուղղահայացը

H կետից γ և β կիսահարթություններում տանենք HF և HE ուղղահայացները:

Քանի որ β-ն և γ-ն իրենց լրացուցիչ կիսահարթություններ են, ~~ապա~~ ապա H կետից MN ուղղին կարելի է տանել միայն մեկ ուղղահայաց, այսինքն HE-ն և HF ճառագայթները համընկնում են: EF և AH հատվող ուղիղներով տանենք EAF հարթություն, որտեղ ∠FHE = ∠FHA + EHA = 180° = AMNF + AMNE

170.



$BB_1 \perp \alpha$

$BH \perp AC$

$AB = 2a\sqrt{5}$

$\angle BAC = 150^\circ$

$BACB_1 = 45^\circ$ / Գտնել BB_1-ը և BH-ը

BHB_1-ը համապատասխան $BACB_1$ երկնիստ անկյան գծային անկյունն է

$\left(\begin{cases} BH \perp AC \\ BB_1 \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow HB_1 \perp AC \right)$, այսինքն $\angle BHB_1 = 45°$:

HBC հարթ. ուղ, երբ $\angle BAC = 150°$, ապա $\angle HAB = 30°$ ⇒
դիտարկենք ΔHBA-ն

$\left.\begin{matrix} \angle BAH = 30° \\ \angle BHA = 90° \\ AB = 2սմ \end{matrix}\right\} \Rightarrow HB = 1$ սմ

դիտարկենք ΔBB_1H-ը

$\left.\begin{cases} \angle BHB_1 = 45° \\ \angle BB_1H = 90° \\ AB = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Այսպիսով․ $BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ սմ, $BH = 1$ սմ

Պատ.՝ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ սմ և 1 սմ։

171.

$\angle ACB = 90°$
$AC = CB$
$CC_1 \perp \alpha$
$CH \perp AB$
$\angle CAC_1 = 30°$

$\angle CHC_1$ - ?

ACB հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան չորս ... CH-ն և՛ միջնագիծ է:
դիտարկենք ΔACH-ը:

$\left.\begin{matrix} \angle ACB = 90° \\ CH \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH = CH = (BH) \Rightarrow \angle CAH = \angle ACH = 45° \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{2}a}{2}$

դիտարկենք ΔACC_1-ը

$\left.\begin{cases} \angle AC_1C = 90° \\ AC = a \\ \angle CAC_1 = 30° \end{cases}\right\} \Rightarrow CC_1 = \frac{a}{2}$

Դիտարկենք 5 ΔCHC_1-ը

CHC_1-ը ուղղանկյուն

$\sin\alpha = \frac{CC_1}{CH} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$

Պատ.: $45°$

172

$\angle ACB = 90°$
$CH \perp AC$
$\angle BCH = 60°$
$AC = 5$ սմ, $AB = 13$ սմ
BB_1 - ?

Համաձայն ~~BACB~~ = (AC) ⊥ գծի թեորեմի:

$\left.\begin{matrix} BC \perp AC \\ BB_1 \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp CB_1 \Rightarrow \angle BCB_1$-ը գծային անկյուն է

Դիտարկենք ΔABC

$\left.\begin{matrix} AB = 13 \text{ սմ} \\ AC = 5 \text{ սմ} \end{matrix}\right\} \Rightarrow CB = 12$ սմ

Դիտ. ΔBCB_1-ը

$\left.\begin{matrix} \angle BCB_1 = 60° \\ CB = 12 \text{ սմ} \end{matrix}\right\} \Rightarrow BB_1 = 6\sqrt{3}$

дан. 5 $\triangle ABC$

$AK = 5$

$\angle CAK = 60°$

1) $CK = 5$

[illegible]

$\angle CKA = 30^\circ$

$\triangle ABC$

$AK = 5$

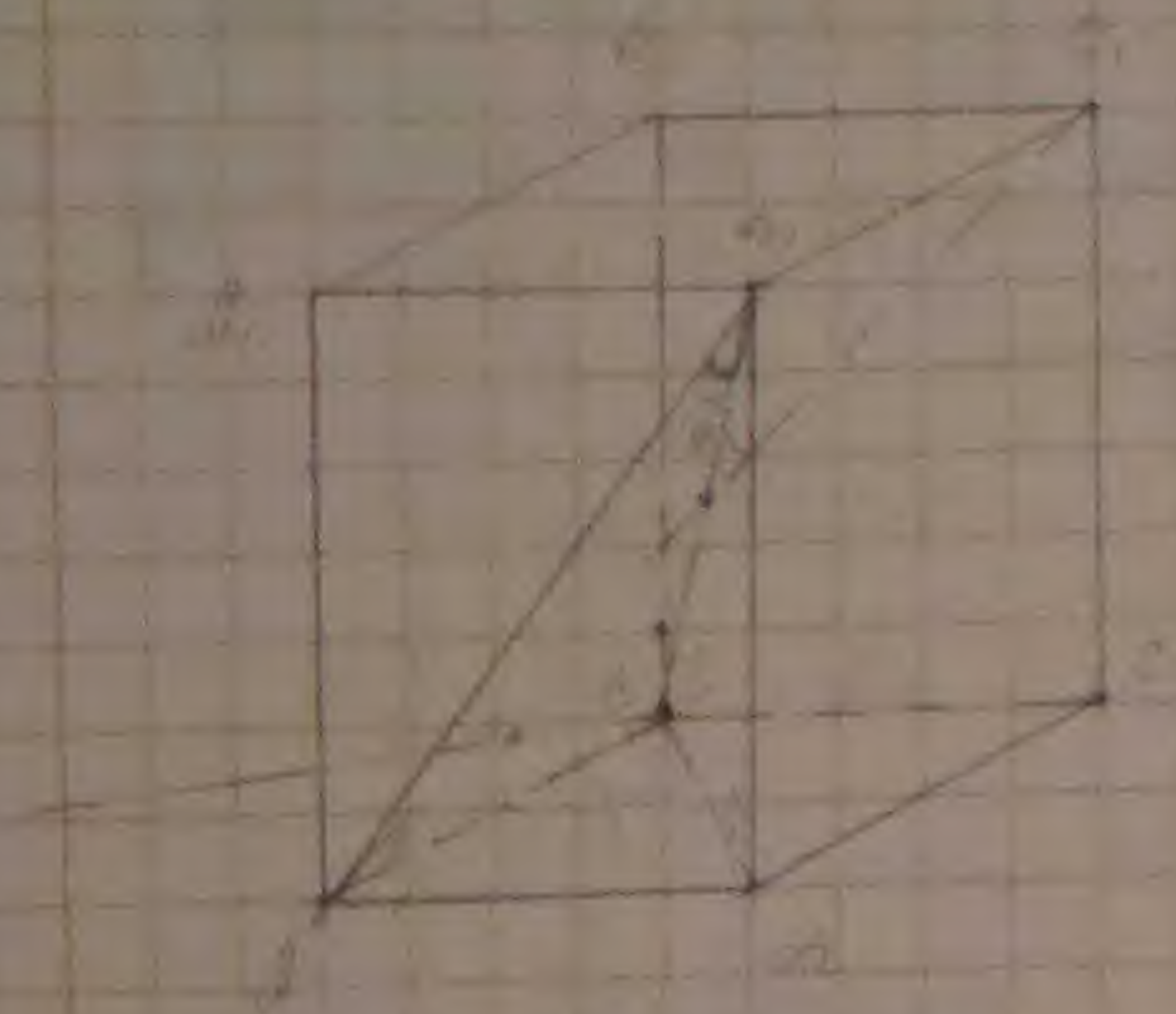
$5 \cdot tg\,60^\circ = 5\sqrt{3}$

$\angle CAK = 60^\circ$

б) $CK = 5$

$CA \quad 5\sqrt{2}$

195.



$AC_1 = 12$ [illegible]

$\angle BA_1B =$ [illegible]

$\angle BC_1A =$ [illegible]

$BA_1 = BC_1 =$ [illegible]

6 [illegible]

$\Delta A_1 = 12 \cdot$ [illegible]

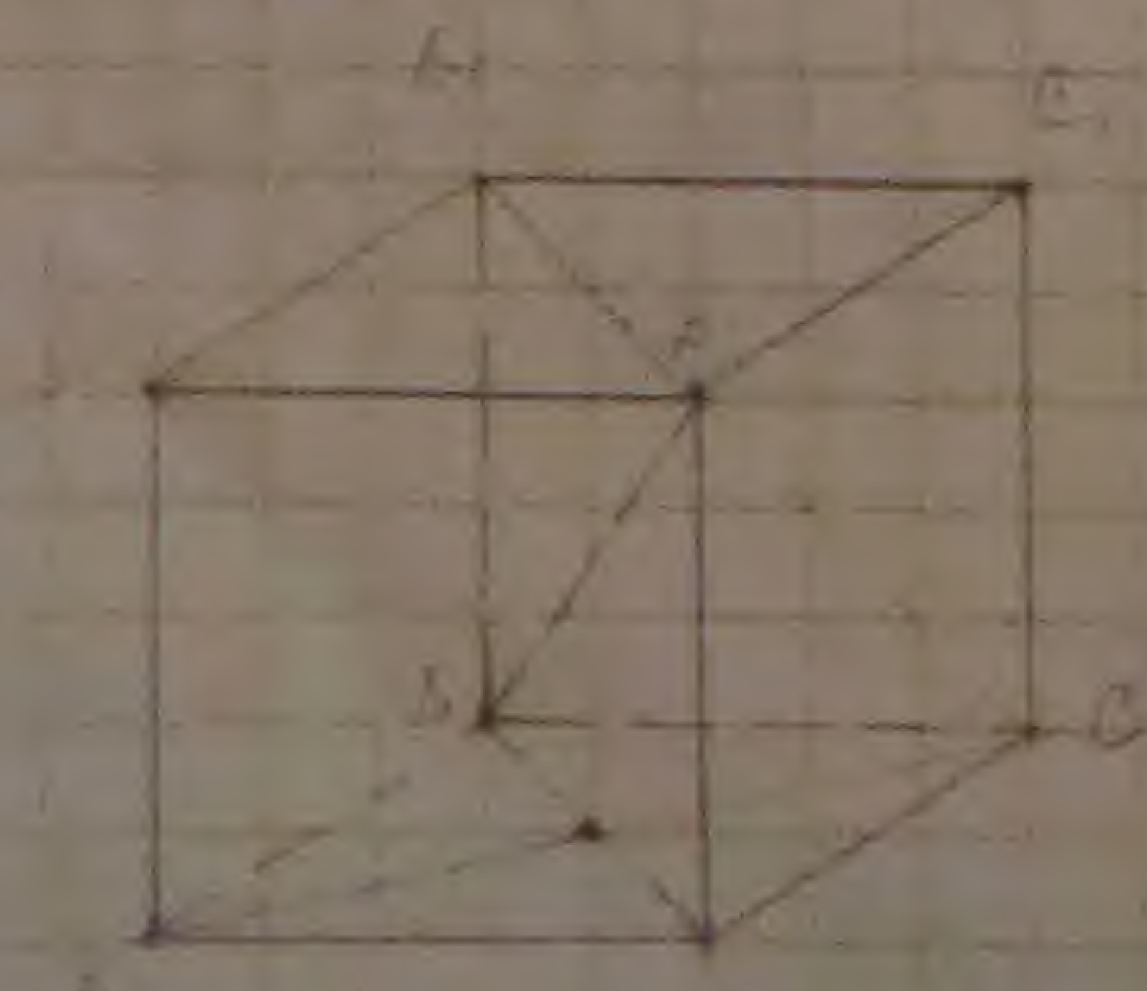
$AO = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$

$12^2 \quad 144 = 72 + 36 + x^2$

$x^2 = 36$

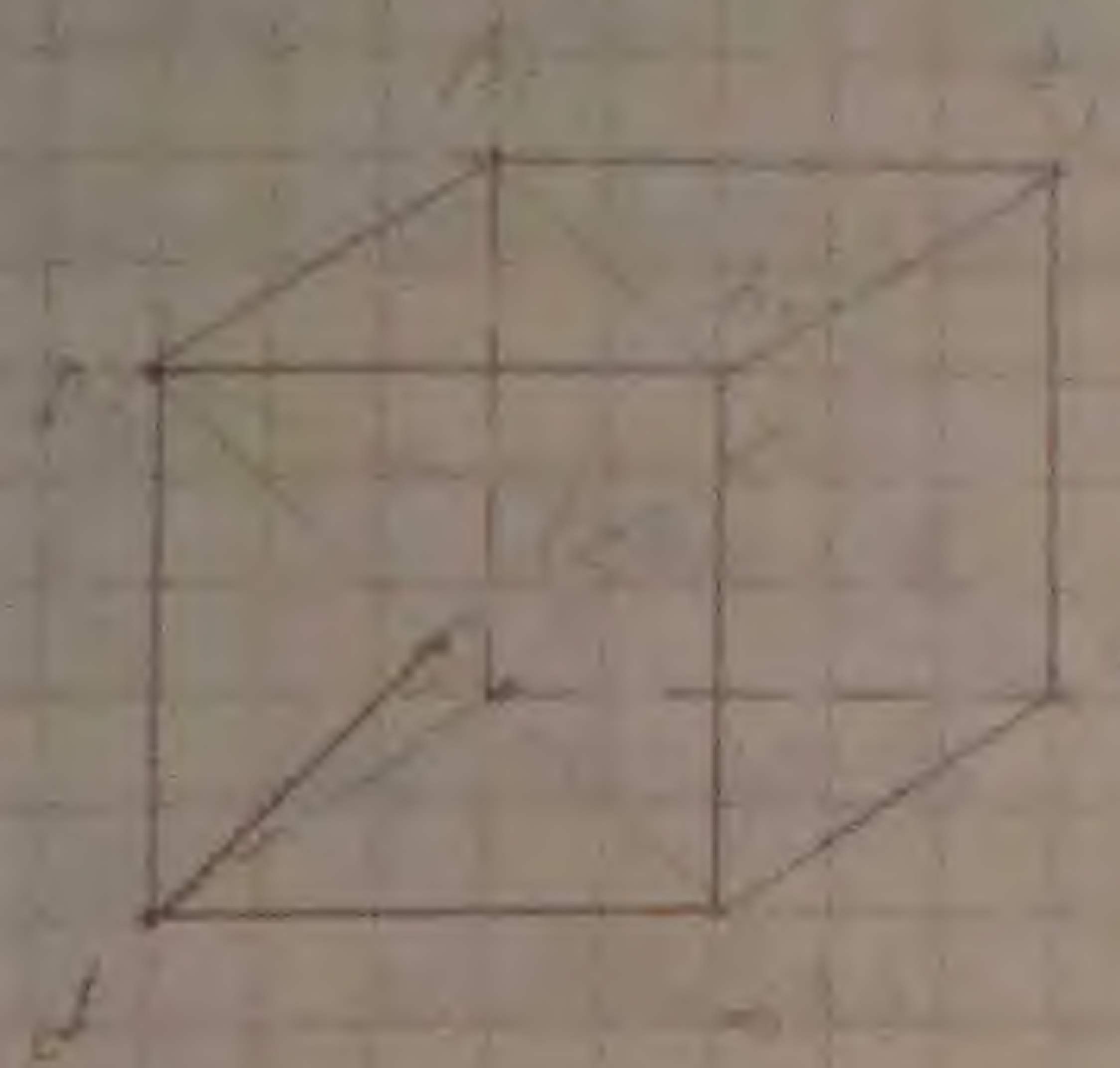
$x = 6$

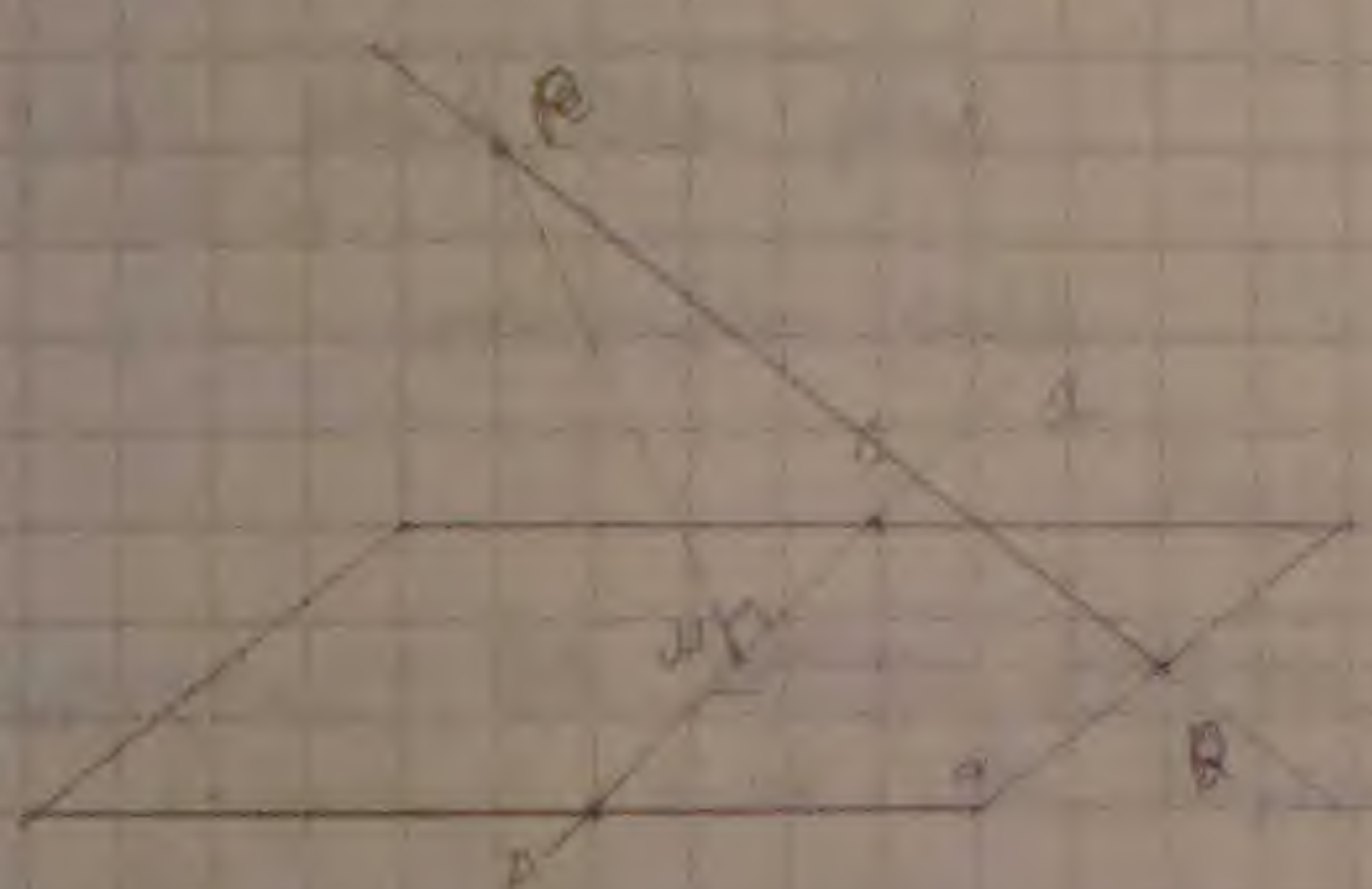
196.



AA_1C_1C

A





№2

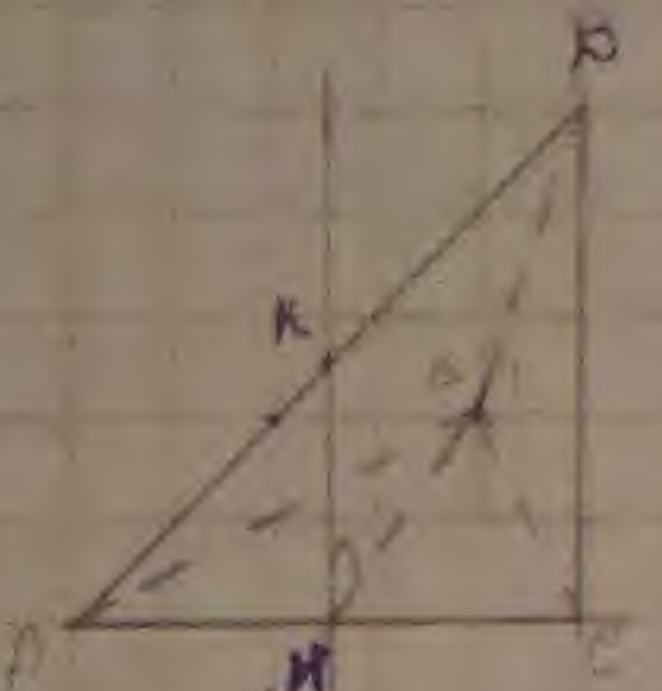
$AQ \perp (\ldots)$?

$PA \perp PQ \Rightarrow AM \perp MQ$ и $AM = MQ$

$QA = QL,\ \Delta AQC \ldots BQ \Rightarrow BM \perp MQ$

$$\left.\begin{aligned} &AC \perp SM \\ &\perp MQ \end{aligned}\right\} \Rightarrow AM \perp MPQ \Rightarrow \begin{aligned} &PG \ldots = 90^\circ \\ &AC = MC \end{aligned}$$

173.



$DC \perp (ABC)$

$AB = BC = AC = 6$ սմ

$BD = 3\sqrt{7}$

Գտնել $\angle DACB$, $\angle DABC$, $\angle CDCA$ երկ.

Երկնիստ անկյունները

ա) Գտնել $\angle DACB$ երկնիստ անկյունը

ABC հավասարակողմ եռ-ի B գագաթից տանենք BM ուղղահայացը, որը AC կողը կիսում է M միջնակետում: ABC եռ-ի հարթության մեջ M կետով կառուցենք AC-ին ուղղ. ուղիղ՝ KM-ն: Քանի որ

$DC \perp AC$; $KM \perp AC \Rightarrow KM \parallel DC$

$AM = MC \Rightarrow AK = KD$ (Թալեսի թ-մ:

Դիտարկենք KMB-ն $\angle ACB$ երկնիստ անկյան գծային անկյունն.

Քանի որ $\left.\begin{array}{l} DC \perp ABC \\ KM \parallel DC \end{array}\right\} \Rightarrow KM \perp (ABC) \Rightarrow KM \perp KB \Rightarrow \angle KMB = 90^\circ$

բ) $\angle ABC$-ն -?

Տանենք ABC եռ. մեջ բարձրություն CM

բարձրությունը: $\left.CM \perp AB; AC = CB\right\} \Rightarrow AM = MB$

Երեք ուղղահայացի $\left.\begin{array}{l} DC \perp (ABC) \\ MC \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow MC \perp DM \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DMC$-ն $\angle ABC$ երկնիստ անկ-

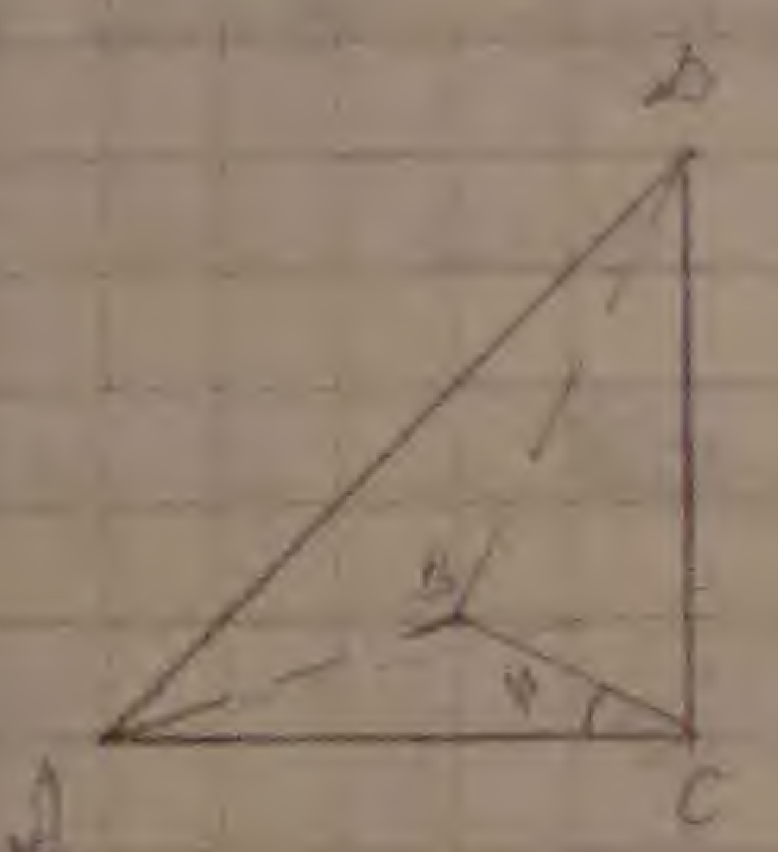
նաև գծային անկյունն է:

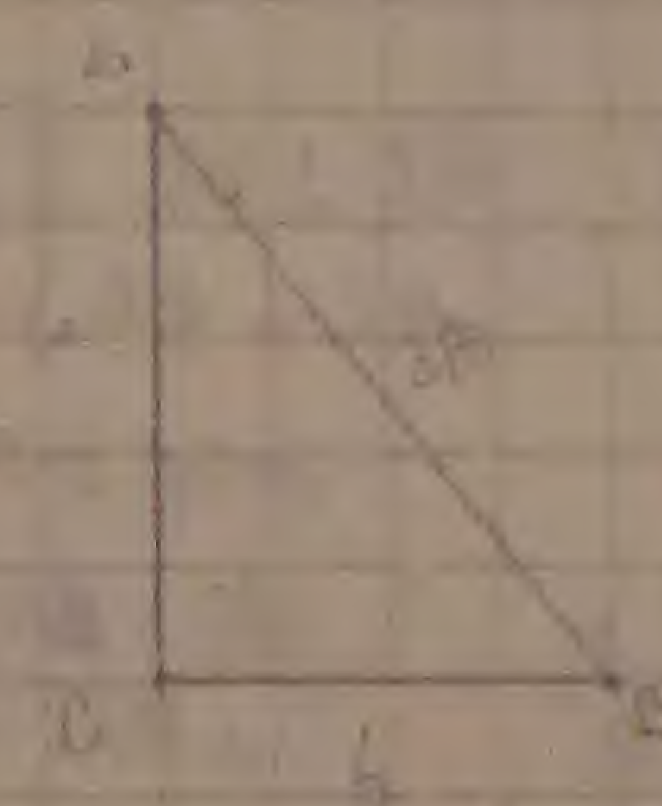
Իսկ $AC = AB = CB = 6$, ապա $HC = 3\sqrt{3}$:

$$\left.\begin{array}{l} DB = 3\sqrt{7} \\ CB = 6 \\ DC \perp CB \end{array}\right\} \Rightarrow DC = 3\sqrt{3}$$

Իսկ $\left.\begin{array}{l} DC = 3\sqrt{3} = HC \\ DC \perp HC \end{array}\right\} tg\,\alpha = 1 \Rightarrow \angle\varphi = 45°$

գ) $BDCA$ -ն -?





DBC եռ. մեջ B գագաթից DC-ին տանենք ուղղահայաց ։ Ըստ երեք ուղղահայացների թեորեմի DBC ուղ. եռ.-ն CB էջի հետ DCB ուղ. եռ. մեջ C կետից տարված ուղղահայացը կլինի AC էջը հետ:

Իսկ $\left.\begin{array}{l} CB \perp DC \\ AC \perp DC \end{array}\right\} \Rightarrow ACB$-ն $BDCA$ երկնիստ անկյան գծային անկյունն է.

Քանի որ φ անկյունը ABC եռ.-ի անկյունն է և ABC-ն հավասարակողմ է $\Rightarrow \angle\varphi = 60°$:

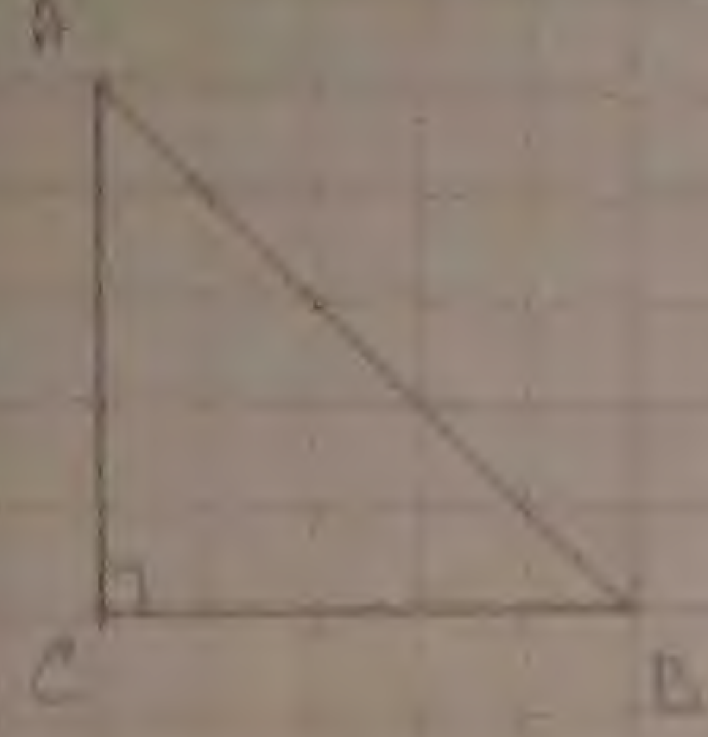
174

$\angle ACB = \angle DAB = \angle DAC = 90°$

$AC = CB = 5$

$BD = 5\sqrt{5}$

Գտնել $ABCD$ երկնիստ անկյունը



Ք-ից որ $\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AC \perp CB$

Մյուս կողմից $\left.\begin{array}{l} AD \perp AB \\ AD \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp (ABC)$

$\left.\begin{array}{l} AD \perp (ABC) \\ AC \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp CD$:

Հետևաբար. $\left.\begin{array}{l} AC \perp BC \\ DC \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ACD$-ն $\overset{ABCD\text{-ի}}{\text{գծային անկյունն է}}$:

Դիտ. 5 ΔABC

$\cancel{DB = 5\sqrt{5}}$ և

$\cancel{\angle DAB = 90^\circ}$

$\left.\begin{array}{l} AC = CB = 5 \\ \angle BAC = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow AB = 5\sqrt{2}$

Դիտ. 5 ΔABD-ն

$\left.\begin{array}{l} AB = 5\sqrt{2} \\ BD = 5\sqrt{5} \\ \angle BAD = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow AD = 5\sqrt{3}$

Դիտ. 5 ΔADC-ն

$\left.\begin{array}{l} AD = 5\sqrt{3} \\ AC = 5 \\ \angle DAC = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow tg\,\varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$

175

Բազմանիստի բոլոր կողերը a են

Որից φ բոլոր երկնիստ անկյունները = են

Դիտարկենք համապատասխան երկու երկնիստ անկյուններ. Օրինակ՝ ΔABC-ն և ΔBCA-ն: Կառուցենք համապատասխանաբար DEC և DFA գծային անկյունները:

$DA = DB = DC = AB = BC = CA = a \Rightarrow \Delta ADB = \Delta CDB = \Delta ABC \Rightarrow$ ... որ նաև

որ $DE \perp AB,\ DF \perp BC,\ AF \perp BC,\ CE \perp AB \Rightarrow DE = DF = AF = CE$

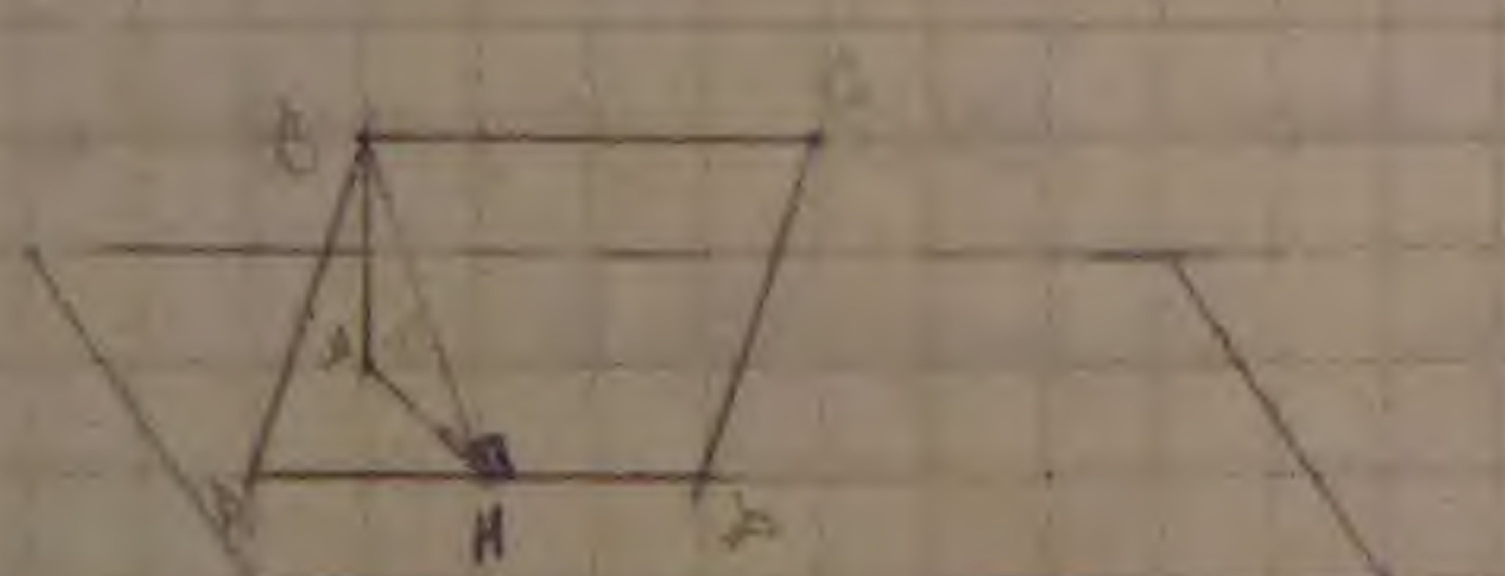
$\left.\begin{matrix} DE = DF = CE = AF \\ AD = DC = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta DEC = \Delta DFA$ (ըստ երեք կողմի) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DEC = \angle DFA$.

Քանի որ անկյունները հավասար են համապատասխանաբար, ապա Ստացանք

5 երկ. անկյունները հավասար են:

176.



$AB = BC = CD = AD$

$AB \parallel CD$

$\angle BAD = 45°$

$\angle BADM = 60°$

$BM = 4\sqrt{3}$

$AB - ?$

B գագաթից տանենք BH ուղղահայաց AD կողմին

Ունենք: $BM \perp (ADM)$, $BH \perp AD \Rightarrow$

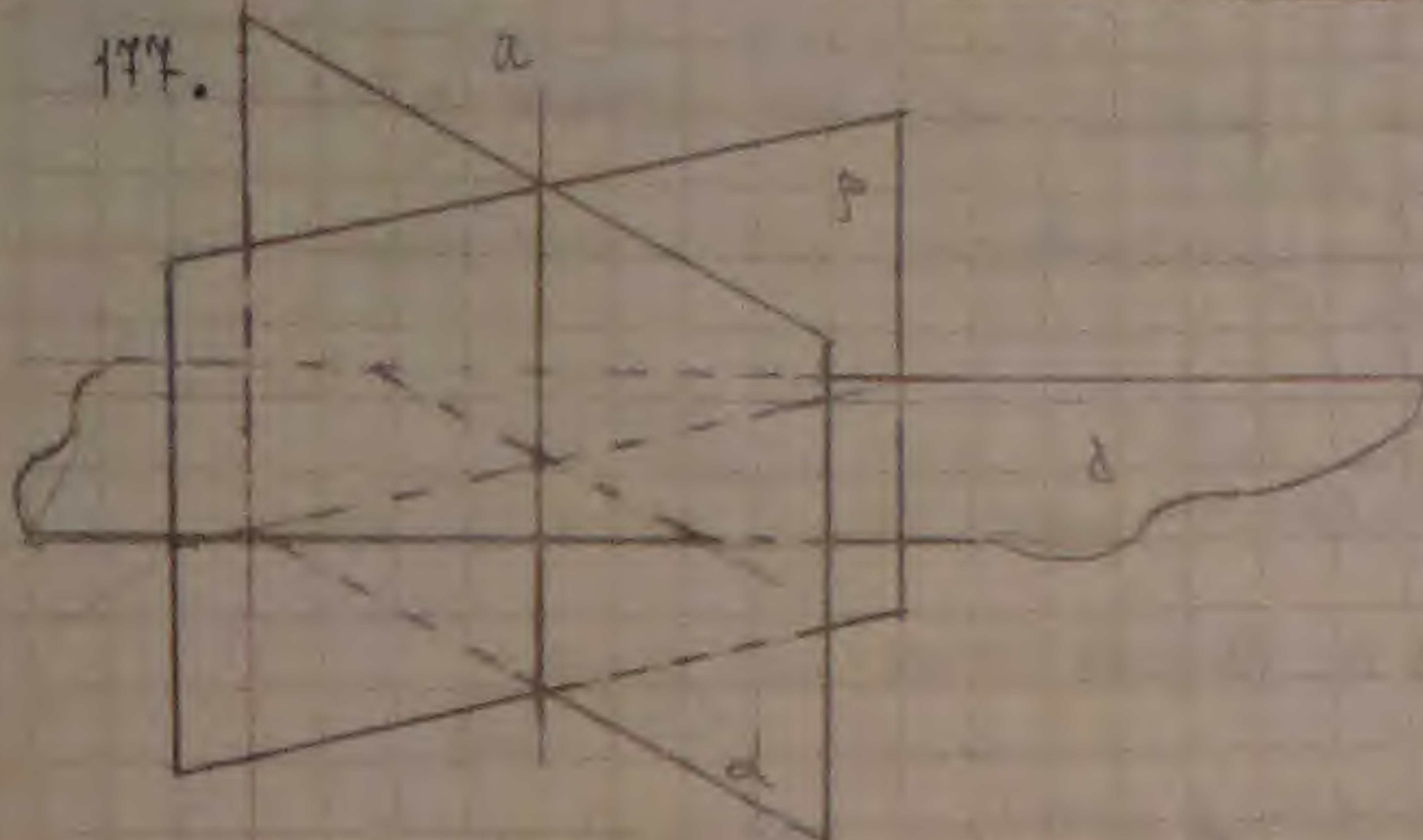
$\Rightarrow AD \perp MH$: $\angle MHB = \angle BADM = 60°$

Դիտարկենք ΔBMH-ը

$\left.\begin{matrix} BM = 4\sqrt{3} \\ \angle BMH = 90° \\ \angle BHM = 60° \end{matrix}\right\} \Rightarrow BH = 8$

Դիտարկենք ΔABH-ը $\left.\begin{matrix} \angle BHA = 90° \\ \angle BAH = 45° \\ BH = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB = 8\sqrt{2}$

177.



α-ն և β-ն հատվում են

a ուղիղ : $\gamma \perp a$

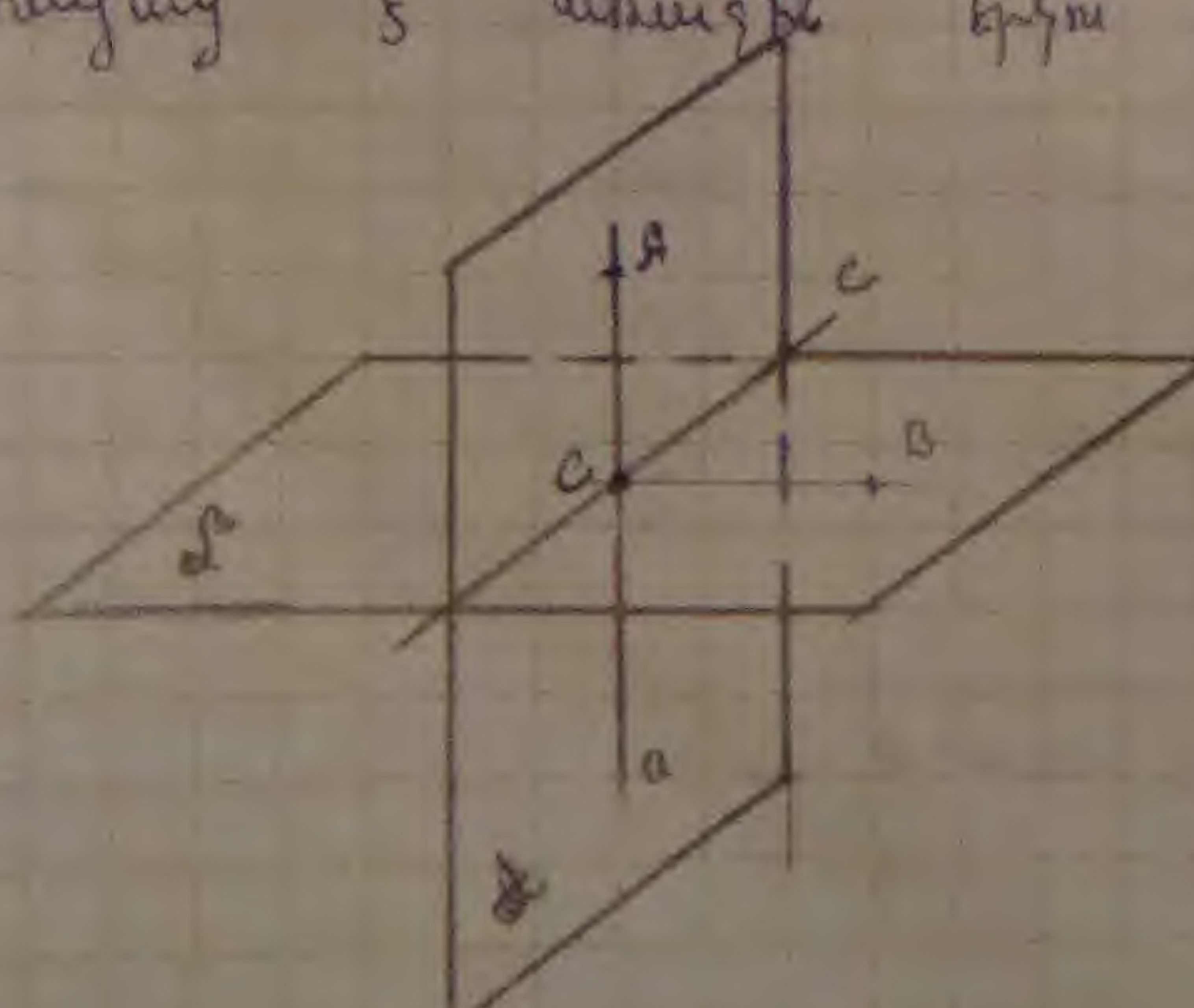
Ապ. որ $\gamma \perp \alpha$ և $\gamma \perp \beta$

Նախ դիտարկենք α և γ հարթությունները: $\left.\begin{matrix} a \subset \alpha \\ a \perp \gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \gamma$

Նույն կերպ $\left.\begin{matrix} a \subset \beta \\ a \perp \gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta \perp \gamma$:

Այսպիսով. եթե երկու հարթությունների հատման գիծը ուղղահայաց է որևէ հարթության, ապա վերջին հարթությունը ուղղահայաց է այդ երկու հարթություններին.

178



$\alpha \perp \beta$

$a \in \alpha$

$a \perp c$

Ապ. որ $a \perp \beta$

α հարթության մեջ տանենք c ուղղին ուղղահայաց AC ուղիղը, ընդ որում C ∈ c: β հարթության մեջ տանենք c-ին ուղղահայաց CB ուղիղը: Այդ դեպքում CA ⊥ c և CB ⊥ c ⇒ ⇒ ACB-ն կլինի երկնիստ անկյան (αβ) երկնիստ անկյան գծային անկյունը: Բայց քանի որ ըստ պայմանի $\alpha \perp \beta \Rightarrow \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow CA \perp CB$:
Ստացվեց, որ AC-ն ուղղ. է β-ի մեջ գտնվող երկու c և CB ուղիղներին, որոնք հատվում են $\Rightarrow CA \perp \beta$:

Թեորեմ․ Երկու փոխուղղահայաց հարթություններից մեկի պատկանող ուղիղը, որն ուղղահայաց է այդ հարթությունների հատման գծին, ուղղահայաց է նաև մյուս հարթությանը:

$\alpha \perp \beta$
$A \in \alpha$
$AA' \perp \beta$

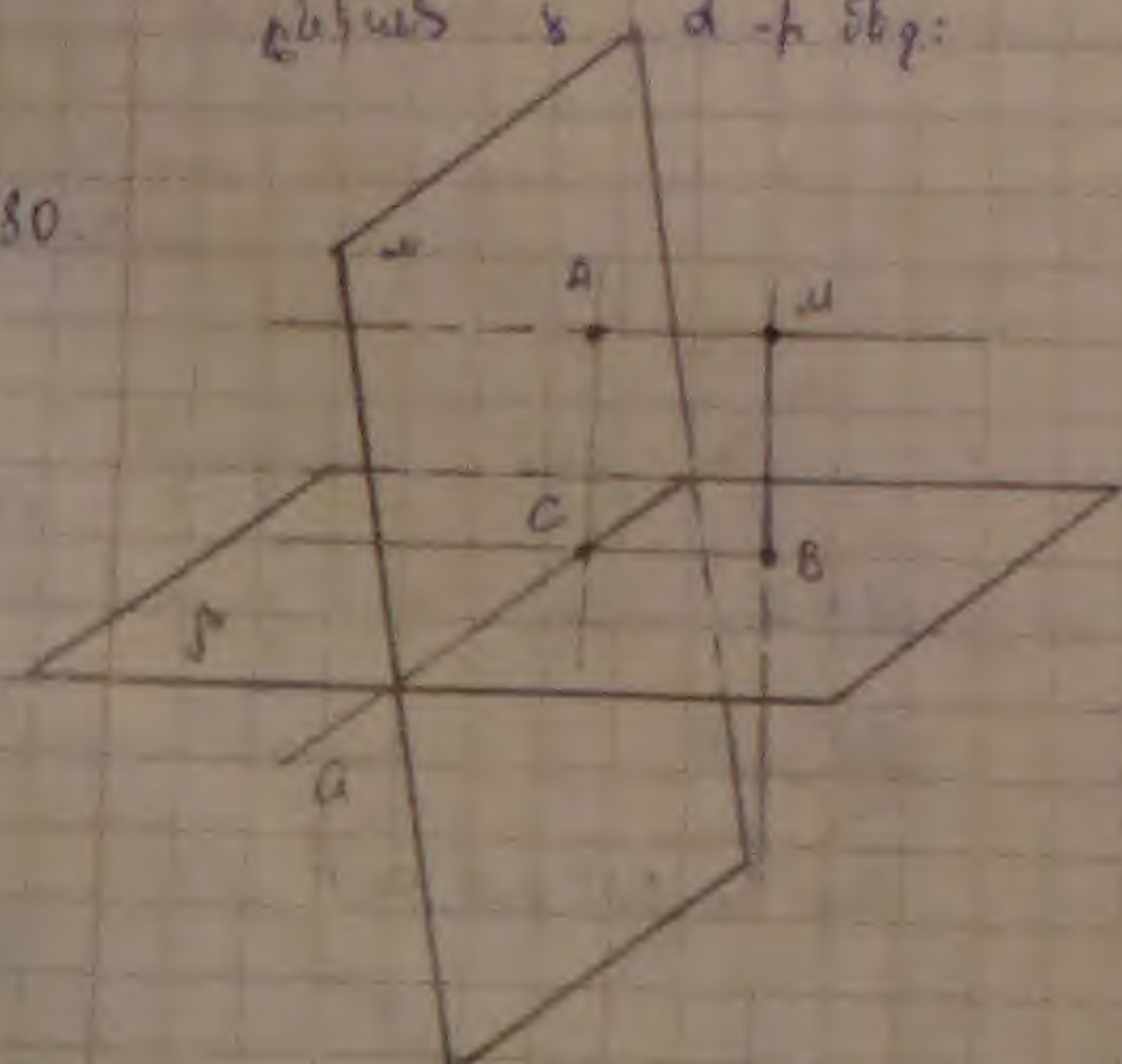
Ապ. որ $AA' \subset \alpha$

Ապացուցել AA'-ը ուղղ. է β-ին

Ապացուցում․ $AA' \not\subset \alpha \Rightarrow A'$ β-ի մեջ գտնվող և c հատման գծի վրա չընկած կետ է: A միավորենք A կետը հատման c ուղղին տանենք AC ուղղահայացը, ընդ որում C ∈ c: C կետով

β հարթության մեջ տանենք c-ին ուղղահայաց CB-ն. Դիտարկենք ACB-ն. AB (α∩β) երկնիստ անկյան գծային անկյունն է: Ըստ պայմանի $\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow AC \perp CB$ և $AC \perp c \Rightarrow AC \perp \beta$. Ապացուցենք, որ ծնելուց β հարթության β հարթությանը կարելի է տանել երկու փոխ ուղղահայաց ուղիղներ, ..., և ... ի ... ուղղությունները ... և AA'-ը ... ընկած է α-ի մեջ:

180.



Տրված է

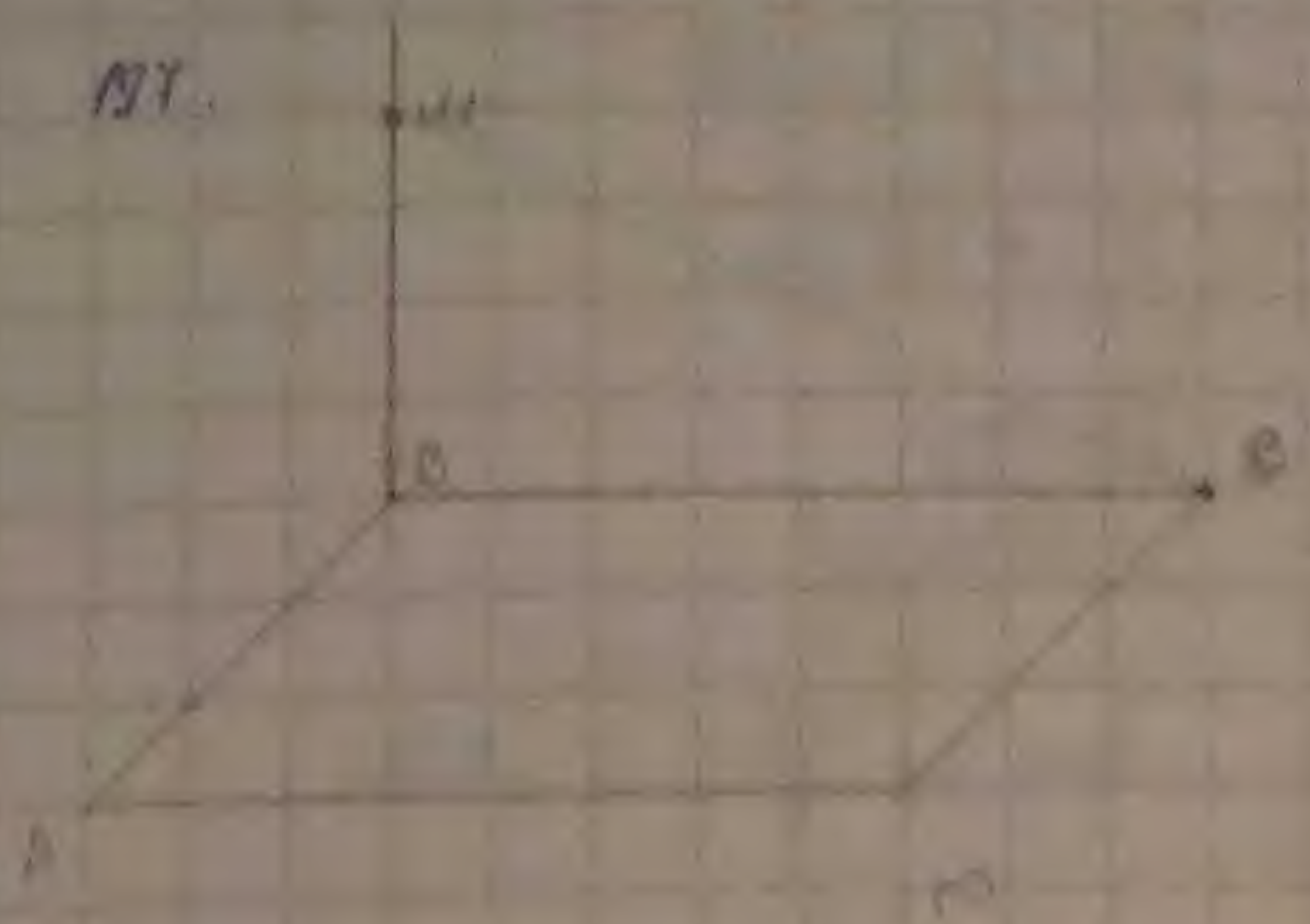
α-ն և β-ն հատվում են a ուղղով

$MA \perp \alpha$ և $MB \perp \beta$

Ապց. $AC \perp a$

14.09.2004թ Դասարանական աշխատանք

197.



Տրված է

$AB = CD$; $ABCD$; $\angle BAD = 90°$

$BM \perp ABCD$

Ապաց. որ $CD \perp (MBC)$

$BM \perp (ABCD) \Rightarrow MB \perp BC$, $MB \perp AB$

Իսկ (որովհետև), ... $AB \perp MB$ (... $AB \perp BC$) $\Rightarrow AB \perp (MBC)$

Բ-նք որ $AB \parallel CD \Rightarrow CD \perp (MBC)$

198.

Տրված է

$BB_1 \perp \alpha$; $BB_1 = 9$ սմ

$BM = 5x$; $AM = 4x$

MM_1 - ?

$M \in (ABB_1)$

$(ABB_1) \perp \alpha \Rightarrow M_1 \in AB_1$

Դիտ. $\triangle ABB_1$-ը

Նկատենք, որ ABB_1 և AMM_1 եռ. նման են, քանի որ

$MM_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha \Rightarrow BB_1 \parallel MM_1$) $\Rightarrow \frac{4x}{9x} = \frac{MM_1}{BB_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow MM_1 = 4$

199.

Տրված է

$AS = SC = SB$

$S \notin (ACB)$

$AM = MB$

$\angle ACB = 90^\circ$

Ապց. որ $SM \perp (ACB)$

ΔACB-ի ուղղանկյան արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնը համընկնում է ներքնաձիգի միջնակետի՝ M-ով $\Rightarrow$ որ M-ը հավասարահեռ է A, C և B գագաթներից:

Քանի որ $\left.\begin{array}{l} AM = MB = MC \\ SA = SM = SC \\ SM\text{-ը ընդհանուր} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMS = \Delta BMS = \Delta CMS$

Դիտարկենք ΔASB-ն.

$\left.\begin{array}{l} AS = SB \\ AM = MB \end{array}\right\} \Rightarrow SM \perp AB$

Քանի որ $SM \perp AB \Rightarrow \angle AMS = \angle SMB = 90^\circ$: Իսկ $\angle SMC = \angle AMS = \angle SMB$ (քանի որ եռանկյունների հավասարությունից)

Ստացվեց որ $\left.\begin{array}{l} SM \perp AB \\ SM \perp MC \end{array}\right\} \Rightarrow SM \perp (ABC)$

200

Տրված է

$AA_1 \dots A_n$ բազմ.-ը ներգծված է O կենտրոնով շրջ.-ին

$OS \perp (AOA_1)$

Ապաց. որ $SA = SA_1 = \dots = SA_n$

O կետը հավասարահեռ է բազմանկյան գագաթներից: Հետևաբար՝

$OA = OA_1 = \dots = OA_n = R$, որտեղ R-ը շրջ.-ի շառավիղն է:

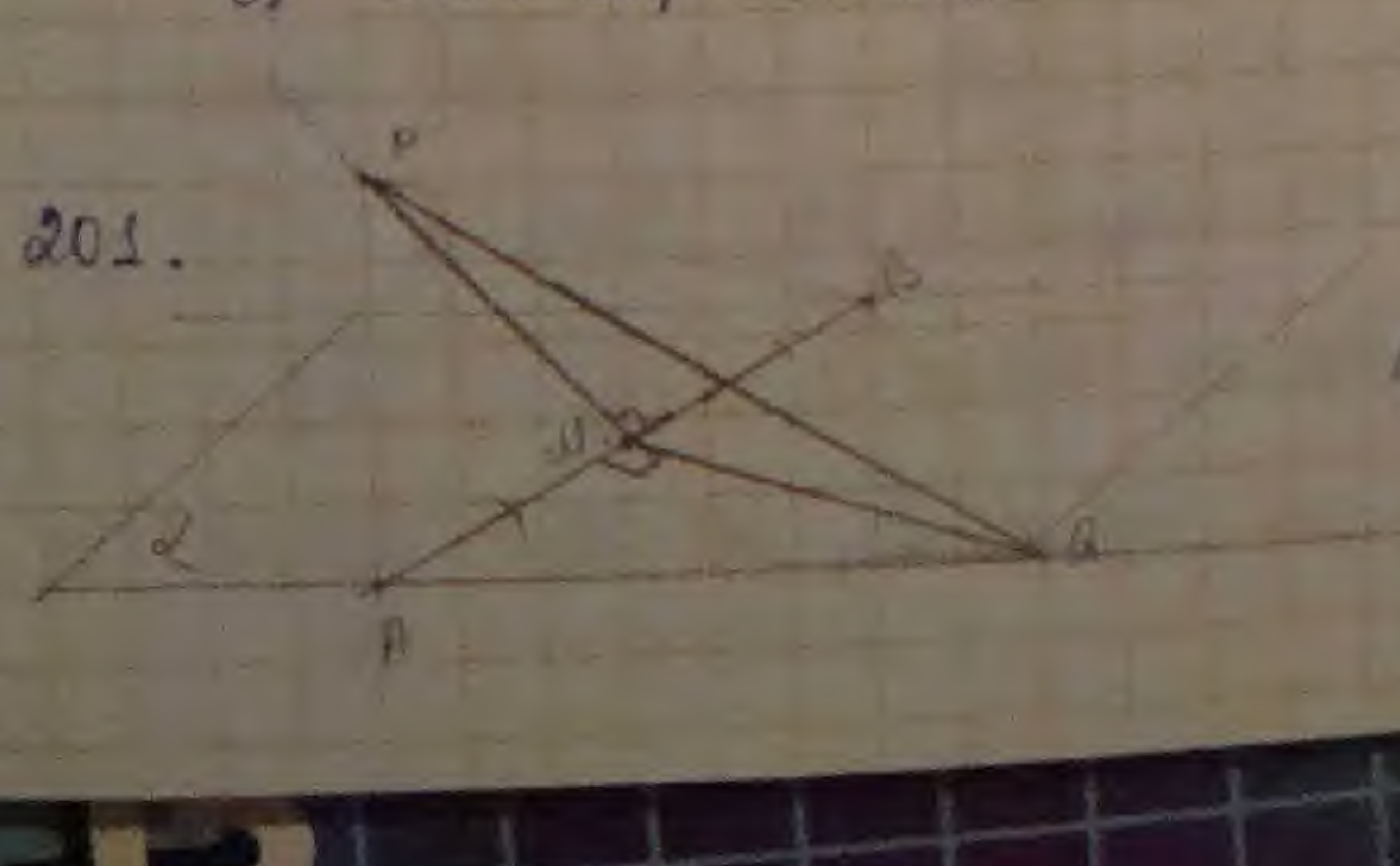
Ըստ խնդրի $SO \perp (AOA_1) \Rightarrow SO$-ն ուղղահայաց է (AOA_1) հարթության մեջ գտնվող յուրաքանչյուր ուղղին՝ $SO \perp OA$; $SO \perp OA_1, \dots, SO \perp OA_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle SOA = \angle SOA_1 = \dots = \angle SOA_n = 90°$.

$$\left.\begin{array}{l} SO\text{-ն ընդհանուր է} \\ OA = OA_1 = \dots = OA_n \\ \angle SOA = \angle SOA_1 = \dots = \angle SOA_n \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta SOA = \Delta SOA_1 = \dots = \Delta SOA_n \text{ (ըստ երկու էջերի)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow SA = SA_1 = \dots = SA_n$

201.



PQ-ն և AB-ն հատվում են
$PA = PB$ և $QA = QB$

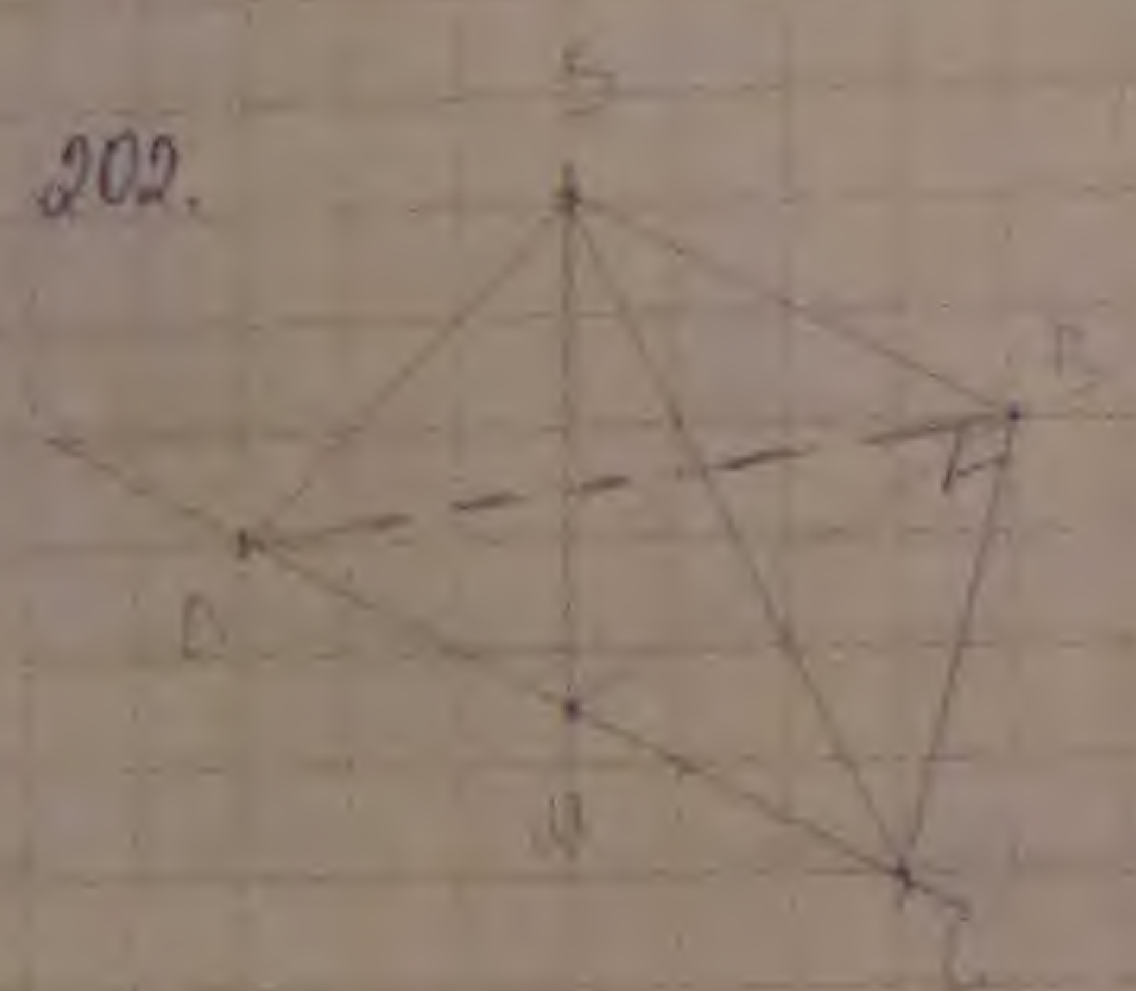
Գտնել PQ-ի և AB-ի կազմած անկյունը

$PA = PB$, $AM = MB$ } $\Rightarrow PM \perp AB$

$QA = QB$
$AM = MB$
AB-ն ընդհ. կողմ է
PAB և QAB-ի համար } $\Rightarrow QM \perp AB$

$AB \perp MP$, $AB \perp MQ$ } $AB \perp (PQM) \Rightarrow AB \perp PQ$

202.



$SA = SB = SC = 10$ սմ
$AM = MC$
$BM = 5$ սմ
$\angle ABC = 90^\circ$

SM - ?

BM-ը ABC-ի միջնագիծն է։ M կետը հավասարահեռ է ուղ. եռ-ի գագաթներից ⇒, որ M-ը եռ.ի արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնն է։

Եռ.ի գագաթներից հավասարահեռ լինելու դեպքում կատարածության մեջ S և M կետերը գտնվում են ուղղա-հայաց վրա (տես 199 խնդիրը) ⇒ $SM \perp (ABC)$

AM-ը նաև $BM = 5 \Rightarrow AM = MC = BM = 5$ սմ

Դիտարկենք ΔASM-ը, որտեղ $AS = 10$ սմ, $AM = 5$ սմ, $\angle AMS = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow SM = 5\sqrt{3}$

203

O-ն ներգծյալ շրջանի կենտրոնն է ΔABC-ի

AB = BC = 10սմ

AC = 12սմ

OK = 4

KE ⊥ AB, KF ⊥ BC, KM ⊥ AC

KE-ն, KF-ը և KM-ը-?

Որոնենք ABC եռ.-ի ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ $r = \frac{S}{p}$

$AC^2 = 2AB^2 - 2AB^2\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{AC^2}{2AB^2} + 1 = \frac{144}{200} + 1 = \frac{18+25}{25} = \frac{43}{25}$

$\beta = \arccos\frac{43}{25}$ $\quad \sin\beta = \sqrt{1 - \frac{1849}{625}}$

$S =$

$AC^2 = 2AB^2 - 2AB\cos\beta = 2AB^2(1 - \cos\beta)$

$\cos\beta = 1 - \frac{AC^2}{2AB^2} = 1 - \frac{144}{200} = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$

$\sin\beta = \sqrt{1 - \frac{49}{625}} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25}$

$\left.\begin{array}{l} S = 96 \\ p = 22 \end{array}\right\} \Rightarrow r = \frac{96}{22} = \frac{48}{11}$

$OK \perp (ABC)$

$OE \perp AC$ (OE-ն շառավիղն է, AC-ն շոշափողն է) $\Rightarrow KE \perp AC$

Դիտ. Տ Δ KEO-ն, որտեղ $KO = 4$, $EO = \frac{48}{11}$ և $\angle KOE = 90^\circ$ ⇒

⇒ $KE = \sqrt{16 + \frac{2304}{121}} = \frac{4\sqrt{265}}{11}$

204.

Տ $AB = BC = AC$

O-ն ABC-ի կենտրոնն է

$OM \perp (ABC)$

$OM = a$

$\angle MCO = \varphi$

Ապ. M-ը հավ. է ΔABC-ի բոլոր կողմերից

Տանենք BE միջնագիծը, որը նաև բարձրություն է՝

BE (նաև OE) ⊥ AC ⇒ ME ⊥ AC. Նույն ձևով ապացուց-վում է, որ M կետից BC և AC կողմերին տարված MF և MN ուղղահայացները այդ կողմերը հատում են F և N միջնակետերում:

OF, OE և ON հավասար են, որպես AF, BE և CN միջնագծերի հատ-ն կետից եղած հատվածներ են, հետևաբար եթե՝ $OE = OF = ON$, OM-ը ընդհ. է, $OM \perp (ABC)$ ⇒ $\Delta MEO = \Delta MFO = \Delta MNO$ ⇒

⇒ $ME = MF = MN$.

$2\cos\varphi$ 5 ΔMOC - 2

$$\left.\begin{array}{l} OM \perp (ABC) \\ OM = a \\ \angle MCO = \varphi \end{array}\right\} \Rightarrow MC = \frac{OM}{\sin\varphi} = \frac{a}{\sin\varphi} \quad 4\ OC = \frac{a}{tg\varphi}$$

Δ ~~ABC - r - 51~~ ΔOEC - п. пр. $\quad EC = OC \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2tg\varphi}$

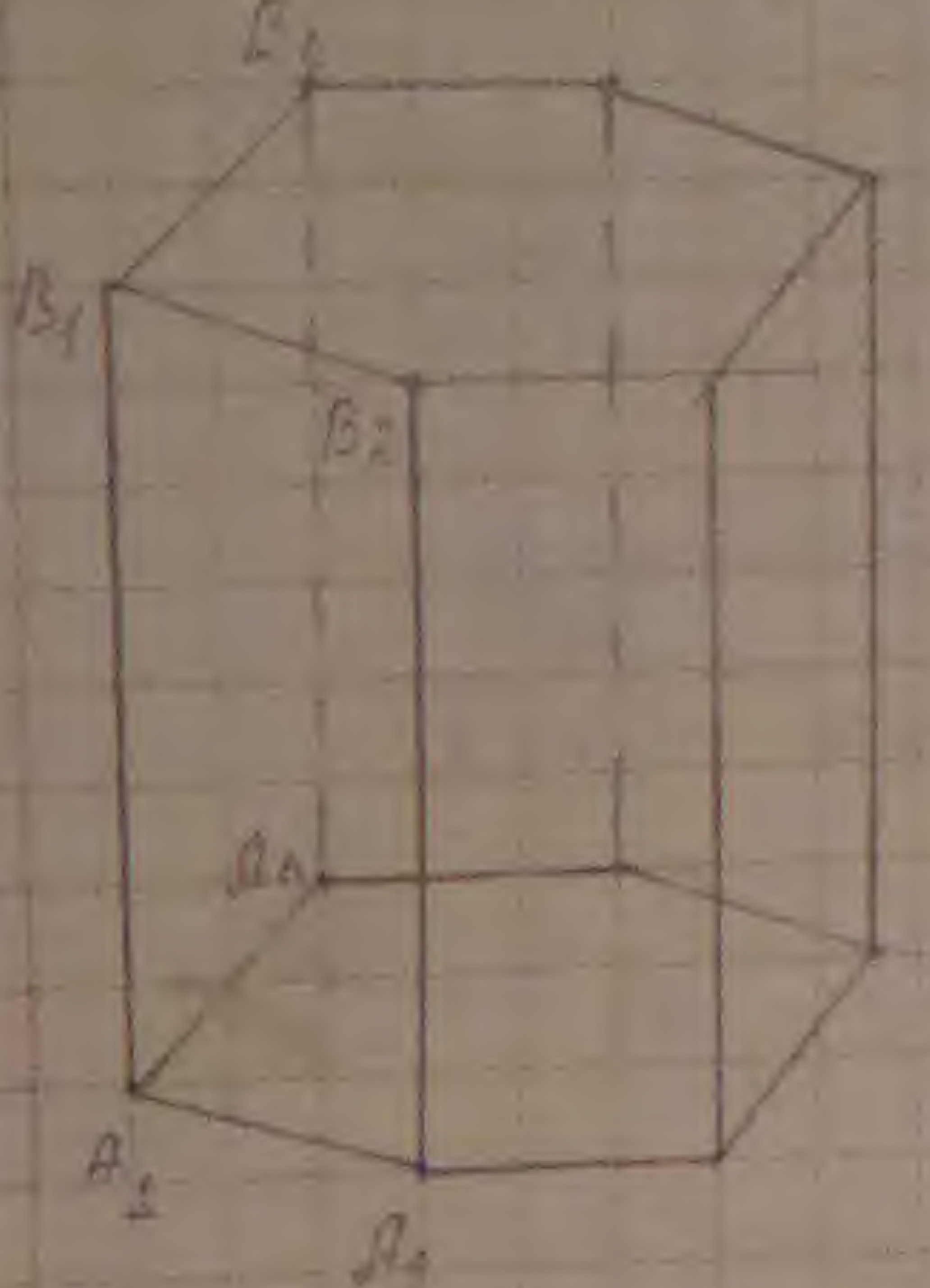
ΔMEC - п. пр. $\quad ME = \sqrt{MC^2 - EC^2} = \sqrt{\frac{a}{\sin^2\varphi} - \frac{3a^2}{4tg^2\varphi}} =$

$$= \sqrt{\frac{4tg^2\varphi \cdot a - 3a^2\sin^2\varphi}{4\sin^2\varphi\, tg^2\varphi}} = \sqrt{\cancel{4tg^2\varphi \cdot a - 3a^2}}$$

$$= \frac{a(4tg^2\varphi - 3a\sin^2\varphi)}{}$$

Ուղիղ պրիզմա

218.



ա) Տրված է $A_1A_1 ... A_nB_1B_2 ... B_n$ ուղիղ պրիզմա՝ $A_1B_1 \perp A_1A_2 ... A_n$

Ապ., որ կողմնային նիստերը ուղղանկյուններ են

Դիտարկենք կամայական նիստ՝ օրինակ $A_1A_2B_2B_1$-ը: Ապ., որ այն ուղղանկյուն է:

Կամայական պրիզմայի կողմնային նիստերը զուգահեռագծեր են: Եթե պրիզման ուղիղ է, ապա նրա կողերը $\perp$ են հիմքերի հարթություններին ⇒, որ եթե $A_1B_1 \perp B_1B_2B_n$ ⇒ ⇒ $A_1B_1 \perp B_1B_2$: Եթե զուգահեռագծի որևէ անկյունը 90°-ի է, ապա այն ուղղանկյուն է ⇒ $A_1A_2B_2B_1$-ը ուղ.-ն է: Նույն կերպ ապ., որ մյուս նիստերը ուղղանկյուններ են:

219. բ) Եթե ուղիղ պրիզմայի հիմքը կանոնավոր n-անկյուն է, նրա հիմքերը կանոնավոր բազմանկյուններ են ⇒ է, որ կողմնային նիստերի, որոնք ուղղանկյուններ են, հիմքերին $\in$ կողմերը = են: Իսկ այդ ուղղանկյունների մյուս կողմերը՝ պրիզմայի կողմնային կողերը = են բարձրությանը ⇒ ...

Կանոնավոր ուղիղ պրիզմայի բոլոր կողմնային նիստերը հավասար ուղղանկյուններ են:

219.

Տրված է

ուղղանկյունանիստ

$AB = 12$սմ

$AD = 5$սմ

$\angle C_1AC = 45^\circ$

CC_1 - ?

Լուծում ABC եռ-ը

$$\left.\begin{array}{l} AB = 12\text{սմ} \\ BC = AD = 5\text{սմ} \\ \angle ABC = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2+BC^2} = \sqrt{144+25} = 13$$

Լուծում ΔACC_1-ը

$$\left.\begin{array}{l} AC = 13 \\ \angle C_1AC = 45^\circ \\ \angle ACC_1 = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow CC_1 = \angle AC_1C = 45^\circ = \angle CAC_1 \Rightarrow AC = CC_1 = 13 \Rightarrow CC_1 = 13$$

Պատ.: $CC_1 = 13$

220

Տրված է

ուղիղ զուգահեռանիստ, որի հիմքը շեղանկյուն

$AC = 24$ սմ

$BD = 10$ սմ

$AA_1 = 10$ սմ

~~$BD \to A_1C$~~

~~BD~~ — ? Գտնել ք. նշված մեծ անկյունագիծը

$AC > BD \Rightarrow AA_1C_1C$ ուղղանկյան անկյունագիծը A_1C-ն է ~~մ~~ մ

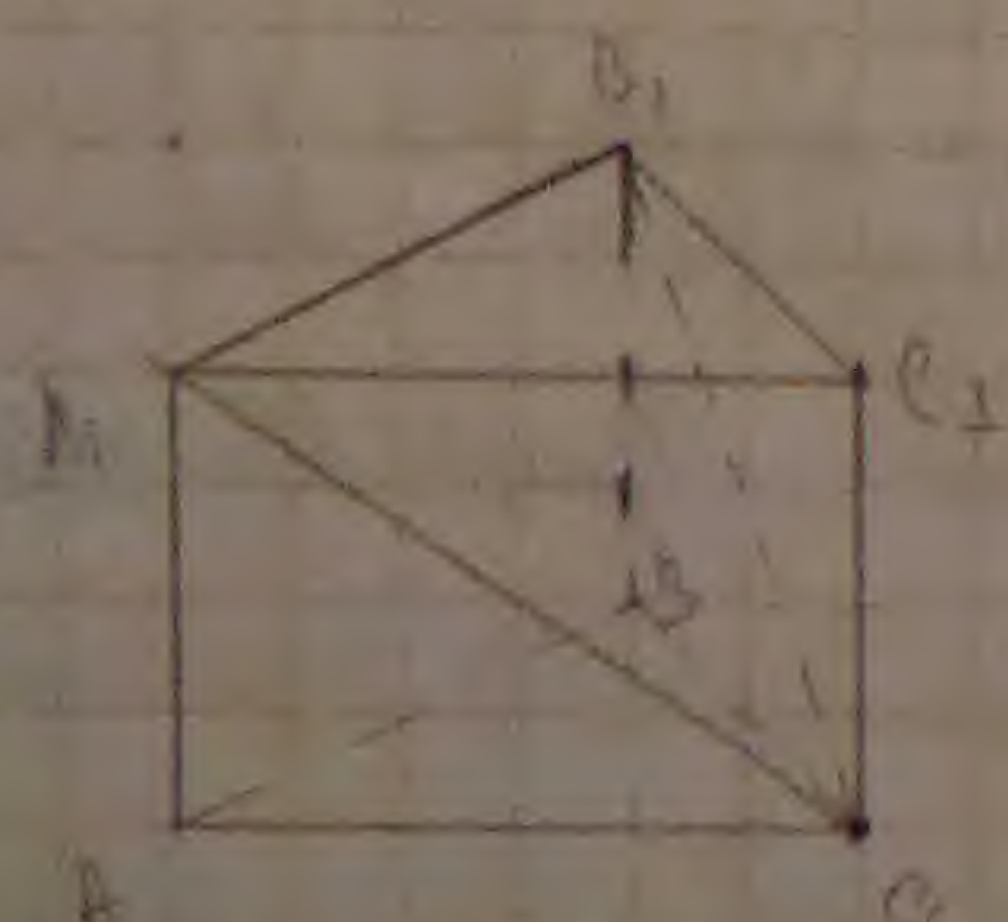
BB_1D_1D ուղղանկյան անկյունագծից՝ BD_1-ից $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_1C = AC_1$-ը $\overset{\text{ուղիղ}}{}$ զուգահեռանիստի մեծ անկյունագիծն է

Դիտ. ΔAA_1C-ն

$$\left.\begin{array}{l} AA_1 = 10 \\ AC = 24 \\ \angle A_1AC = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow A_1C = 26 \text{ սմ}$$

221



Տրված է

կանոնավոր եռանկյուն պրիզմա

$AB = 8$ սմ

$AA_1 = 6$ սմ

$S_{A_1B_1C}$ — ?

$\left.\begin{array}{l} A_1C_1 = 8 \text{ սմ} \\ CC_1 = 6 \text{ սմ} \\ \angle CC_1A_1 = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow A_1C = 10 \text{ սմ}$

Իսկ նույնը՝ $\left.\begin{array}{l} A_1C_1 = B_1C_1 \\ CC_1 \text{-ը ընդհանուր} \end{array}\right\} \Rightarrow AA_1C_1C$ և CC_1B_1B ուղղանկյունները հավասար են $\Rightarrow$

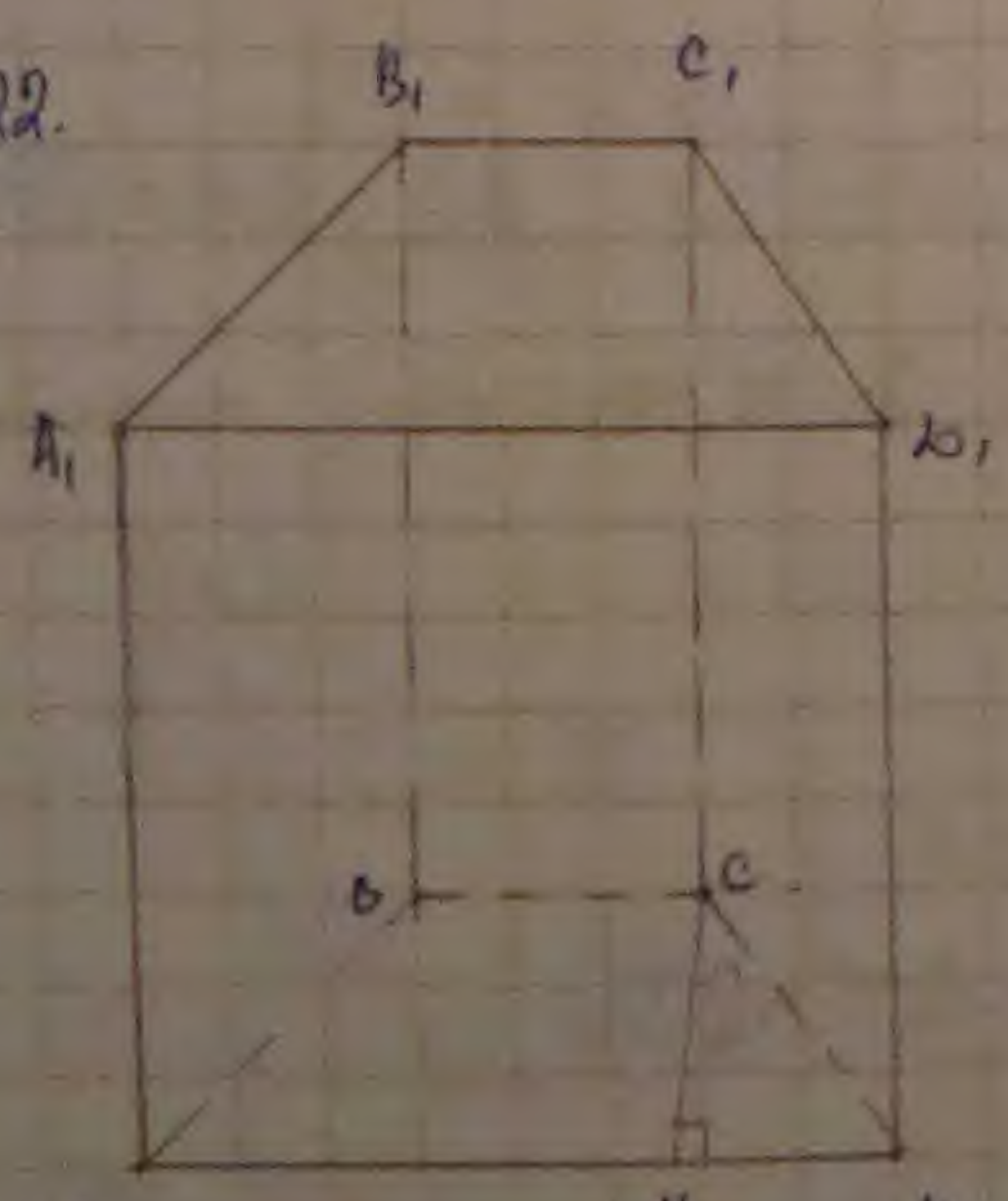
որ $B_1C = A_1C = 10 \text{ սմ}$

Քանի որ $\left\{\begin{array}{l} B_1C = A_1C = 10 \text{ սմ} \\ AB = 8 \text{ սմ} \end{array}\right. \Rightarrow P/2 = 14 \text{ սմ}$

Ըստ Հերոնի բանաձևի՝

$S_{A_1CB_1} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{\cancel{144}\ 14 \cdot 16 \cdot 6} = \sqrt{1344} = 33 \text{ սմ}^2$

222.



Տրված է ուղղի պրիզմա

$A_1B_1 \not\parallel C_1D_1$, $B_1C_1 \parallel A_1D_1$

$AB = CD$

$AD = 25 \text{ սմ}$

$BC = 9 \text{ սմ}$

$CH = 8 \text{ սմ}$

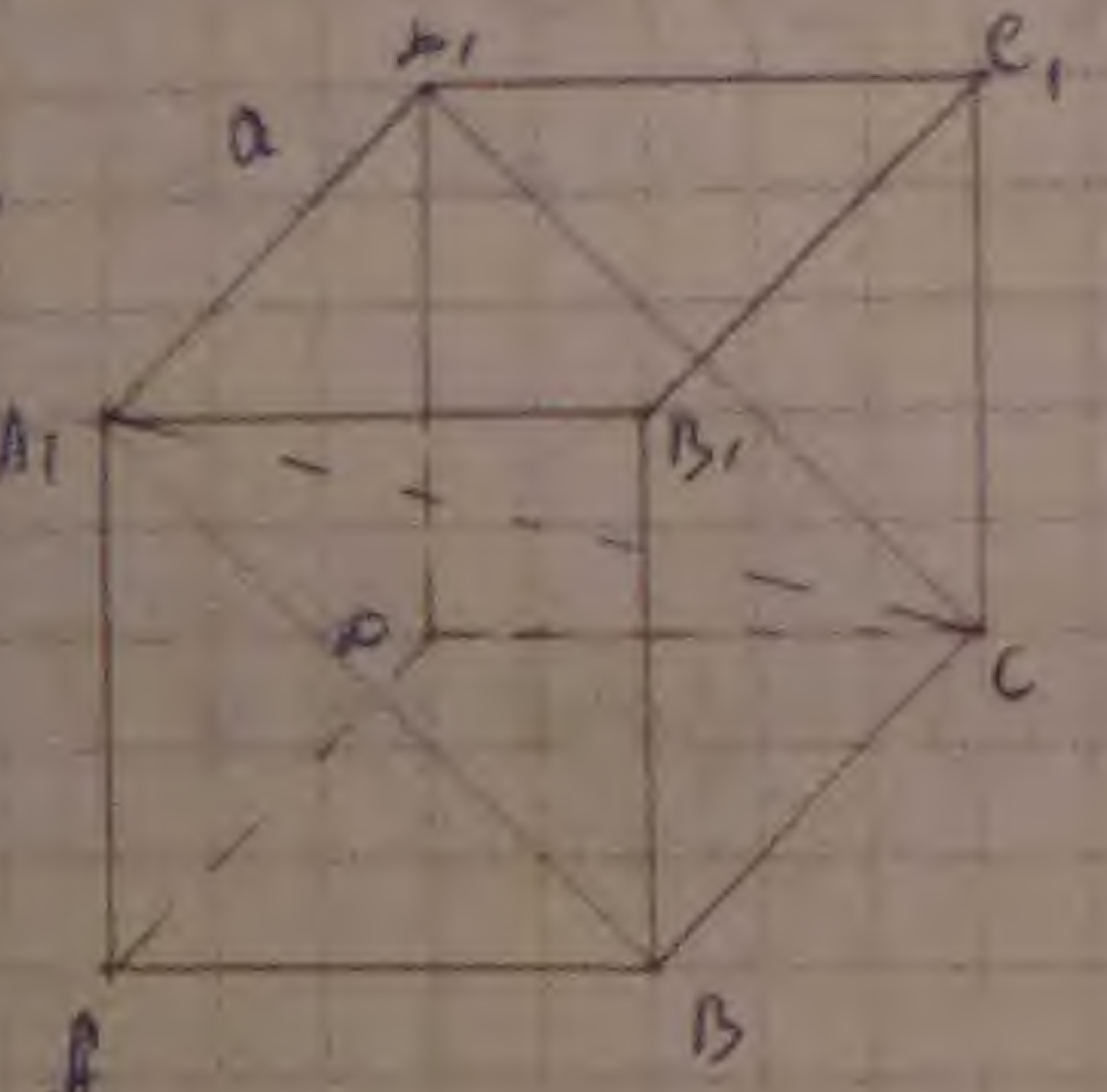
Կողմերի մակերեսի գտնելու ...?

$\angle CDA$-ն CDD_1A երկնիստ անկյան գծային անկյունն է ($DD_1 \perp ABC \Rightarrow CD \perp DD_1$ և $AD \perp DD_1$), $\angle BAD$-ն՝ BAA_1D-ինը, $\angle ABC$-ն՝ ABB_1C-ինը և $\angle BCD$-ն՝ BCC_1D-ինը: Բայց որ $ABCD$-ն հավասարասրուն է $\Rightarrow \angle CDA = \angle BAD$ և $\angle ABC = \angle BCD$

Դիտարկենք $ABCD$ սեղանը: $HD = \frac{AD - BC}{2} = 8 \Rightarrow \angle CDA = \angle BAD = 45^\circ$, իսկ $\angle ABC = \angle BCD = 180 - 45 = 135^\circ$

Պատ: 45° և 135°:

223.



Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը

$S_{CBA_1D_1} = 6\sqrt{2}$ սմ^2

Գտնել a-ն և A_1C-ն

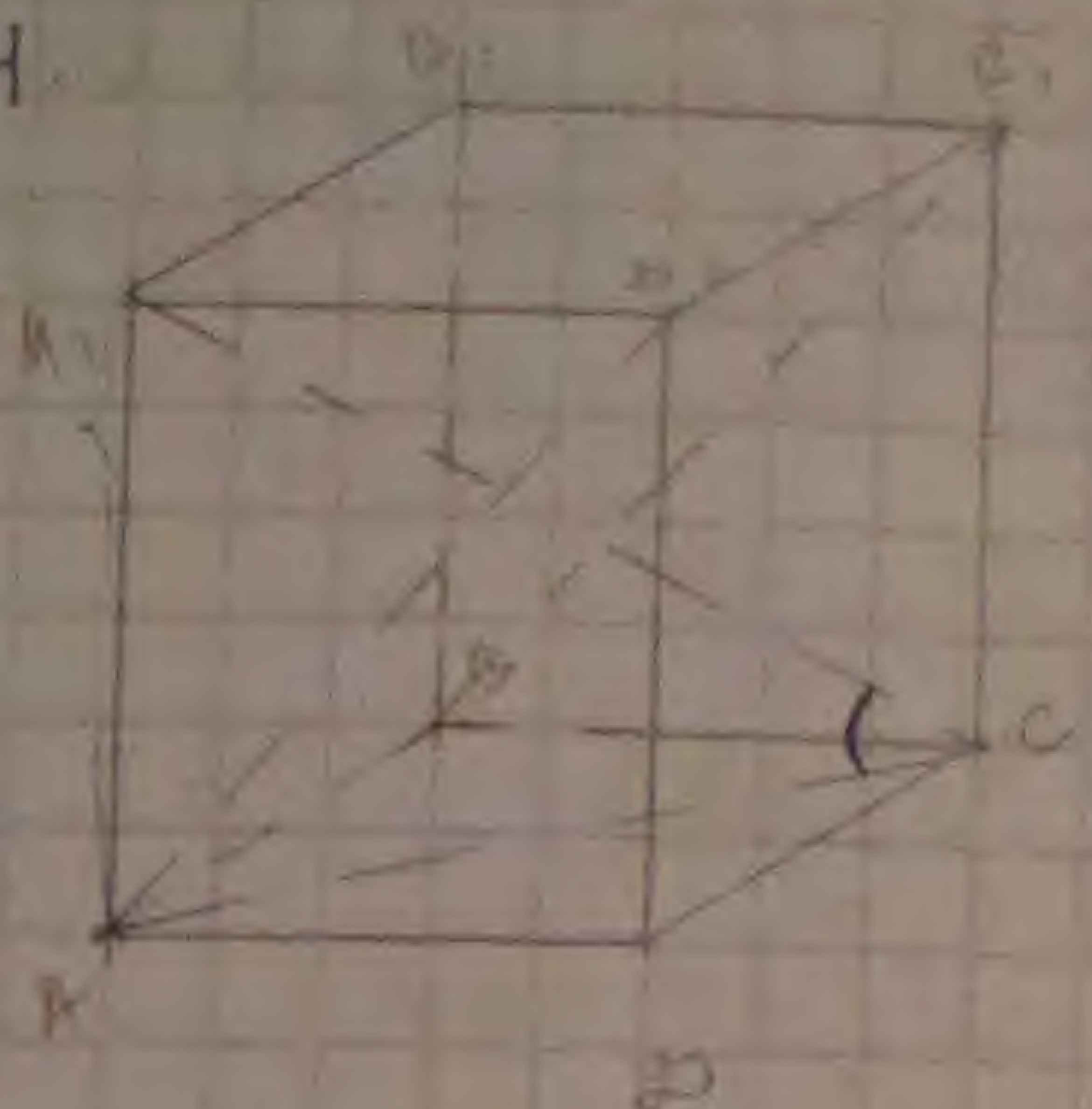
Խորանարդի կողը նշանակենք a-ով: $A_1B = D_1C = \sqrt{2}a$

Բայց որ $BC \perp (DCC_1) \Rightarrow BC \perp CD_1 \Rightarrow CBA_1D_1$-ը ուղղանկյուն է և $S = a^2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$a = \sqrt{6}$

Պյութագորասի $\begin{cases} BC = \sqrt{6} \\ A_1B = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow A_1C = 3\sqrt{2}$

224



Տրված է

$\angle A_1CA = 60^\circ$

$AC = 4\sqrt{2}$

$S_{AB_1C_1B}$ – ?

Դիտ. ը $\triangle AA_1C$-ն

$$\left.\begin{array}{l} \angle A_1AC = 90^\circ \\ \angle A_1CA = 60^\circ \\ AC = 4\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow AA_1 = AC \cdot tg60^\circ = 4\sqrt{6} \text{ սմ} \Rightarrow$$

⇒ Դիտ. $\triangle B\cancel{A}C$ ո-ն

$BB_1 = 4\sqrt{6}$ սմ

$$\left.\begin{array}{l} AC = 4\sqrt{2} \\ AB = BC \\ \angle ABC = 90^\circ \end{array}\right\} AB = BC = 4$$

Դիտ. ը $\triangle BB_1C$-ն

$$\left.\begin{array}{l} B_1C_1 = 4 \\ B_1B = 4\sqrt{6} \\ \angle BB_1C_1 = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow BC_1 = 4\sqrt{7} \text{ սմ}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB_1 \parallel BC_1 \\ AB \parallel B_1C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow AB_1C_1B\text{-ն զուգահեռագիծ է}$$

$AB \perp (BB_1C) \Rightarrow AB \perp BC_1 \Rightarrow ABC_1B$ ուղղանկյուն է

$S_{AB_1C_1B} = AB \cdot BC_1 = 4 \cdot 4\sqrt{7} = 16\sqrt{7}$ սմ^2

215.

$\angle MN = 60°$

$AK \perp MN$

$KE \perp MN$

$KE = 6N$

KE

$AE \parallel CD$

$AK \perp MN$, $KE \perp MN$, $KE \perp MN$ — $\angle AKE$ [illegible]

$\angle = 60°$

$AK \perp MN$, $KE \perp MN$ $\Rightarrow MN \perp (AKE) \Rightarrow MN \perp AE$

$MN \parallel AE \parallel CD$, $CD \perp \alpha$ $\Rightarrow AE \parallel \alpha$

$\beta \supset AE$ [illegible]

$\beta \cap \alpha = MN$

$\Rightarrow AE \parallel MN$, $MN \perp AE$ $\Rightarrow$

Из $\triangle$ AEK - 2

$AE = \sqrt{AK^2 + KE^2} = \dots = \sqrt{64 + 42{,}25 - 1} =$

$= \sqrt{21{,}25} =$

$= \sqrt{64 + 42{,}25} - \quad 106{,}9$

$\sqrt{54{,}25} = 7{,}5$

226.

$BB_1 = 4{,}5$

$AB = 2{,}5$

$OK \parallel B_1D$
$C \in AC$
$\Rightarrow (AKC) \parallel B_1D$

$B_1D = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$OK = \sqrt{6}$

$AC = 2\sqrt{2}$

$S = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{3}\ S^2$

222

AB = BC = 13

AC = 10

$B_1O \perp ABC$

$\angle A_1BO = 45°$

$S_{AA_1C_1C}$ - ?

$BD \perp AC$

$B_1O \perp (ABC)$

AO

AD = 12

$AD = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8$ cm

$BO \cdot tg = OA$

$B_1O = OA \cdot tg\,45° = 8$

$B_1A = 8\sqrt{2}$

$S = AC \cdot \dots = 10 \cdot 8\sqrt{2} = 80\sqrt{2}$

$\angle A_1BO = 45^\circ$ $AB = AC = 12$ $AD = 12$

$S_{AB_1C_1C} = ?$

$(A_1O \perp ABC$

$BC \perp AD \Rightarrow BC \perp DA_1$

$CC_1 \parallel AA_1 \Rightarrow BC \perp CC_1 \Rightarrow S_{BB_1C_1C} = BC \cdot CC_1$

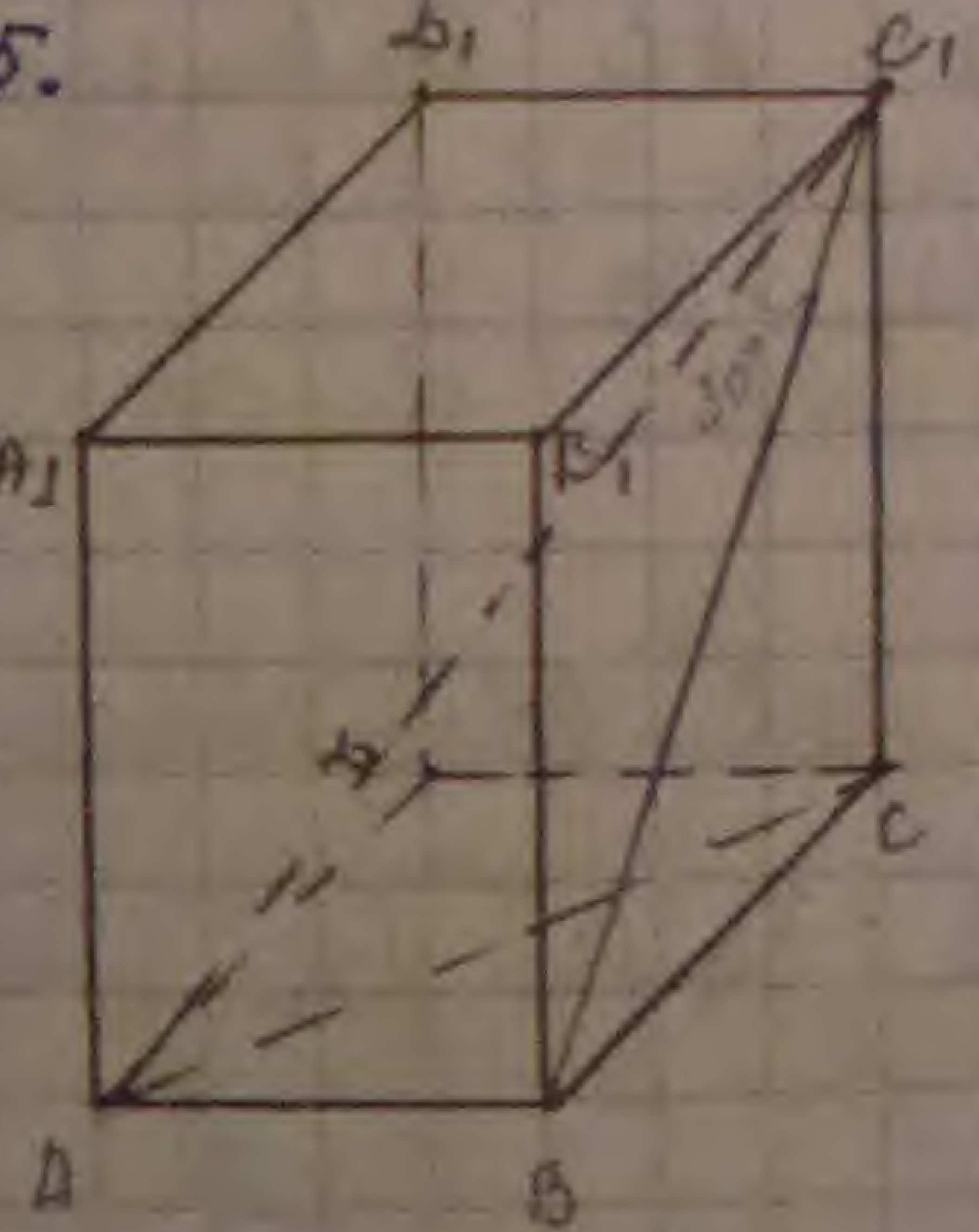
$AO = \frac{2}{3} AD$

$AA_1 = \frac{AO}{\cos 45^\circ} = 3\sqrt{2}$

230.

տնային 230 - 235.

225.



Տրված է

Կանոնավոր քառանկյուն

պրիզմա

AC_1-ի և AB_1C_1C հարթ

կազմած անկյունը՝ 30°

Գտնել AC_1-ի և $ABCD$ հարթ

կազմած անկյունը

(AC_1 անկյունագծի BB_1C_1C հարթության վրա դրա պրոյեկցիայի անկյու-
նագծի և պրոյեկցիայի կազմած անկյունը)

AC_1 անկյունագծի և BB_1C_1C հարթության կազմած անկյուն կոչվում է AC_1 ուղղի և BB_1C_1 հարթության վրա դրա պրոյեկցիայի կազմած անկյունը:

$AB \perp BB_1$ (AA_1B_1B-ն ուղղանկյուն է) $\Rightarrow AB \perp BB_1C_1C$ հարթությանը $\Rightarrow$
$AB \perp BC$ ($ABCD$-ն քառակուսի է)

$\Rightarrow BC_1$-ը AC_1-ի պրոյեկցիան է BB_1C_1C հարթության վրա $\Rightarrow \angle AC_1B = 30^\circ$

Դիտարկենք ΔABC_1-ը

$AB \perp BB_1C_1C \Rightarrow AB \perp BC_1$-ին $\Rightarrow ABC_1$-ը ուղղանկյուն եռ. է:
որի AC_1B անկյունը 30°-ի է: AC_1 ներքնաձիգը հավասար է a-ի, AB էջը հետևաբար $AB = \frac{a}{2}$

Դիտարկենք ΔACB

$ABCD$-ն քառակուսի է $\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ \Rightarrow \Delta ACB$-ն $\overset{\text{հավասարասրուն}}{\text{ուղղ.}}$ եռ.
որի էջերը $\frac{a}{2}$ են: Ներքնաձիգը կլինի $AC =$

$= \frac{a}{2\cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$

Դիտարկենք ΔAC_1C-ն

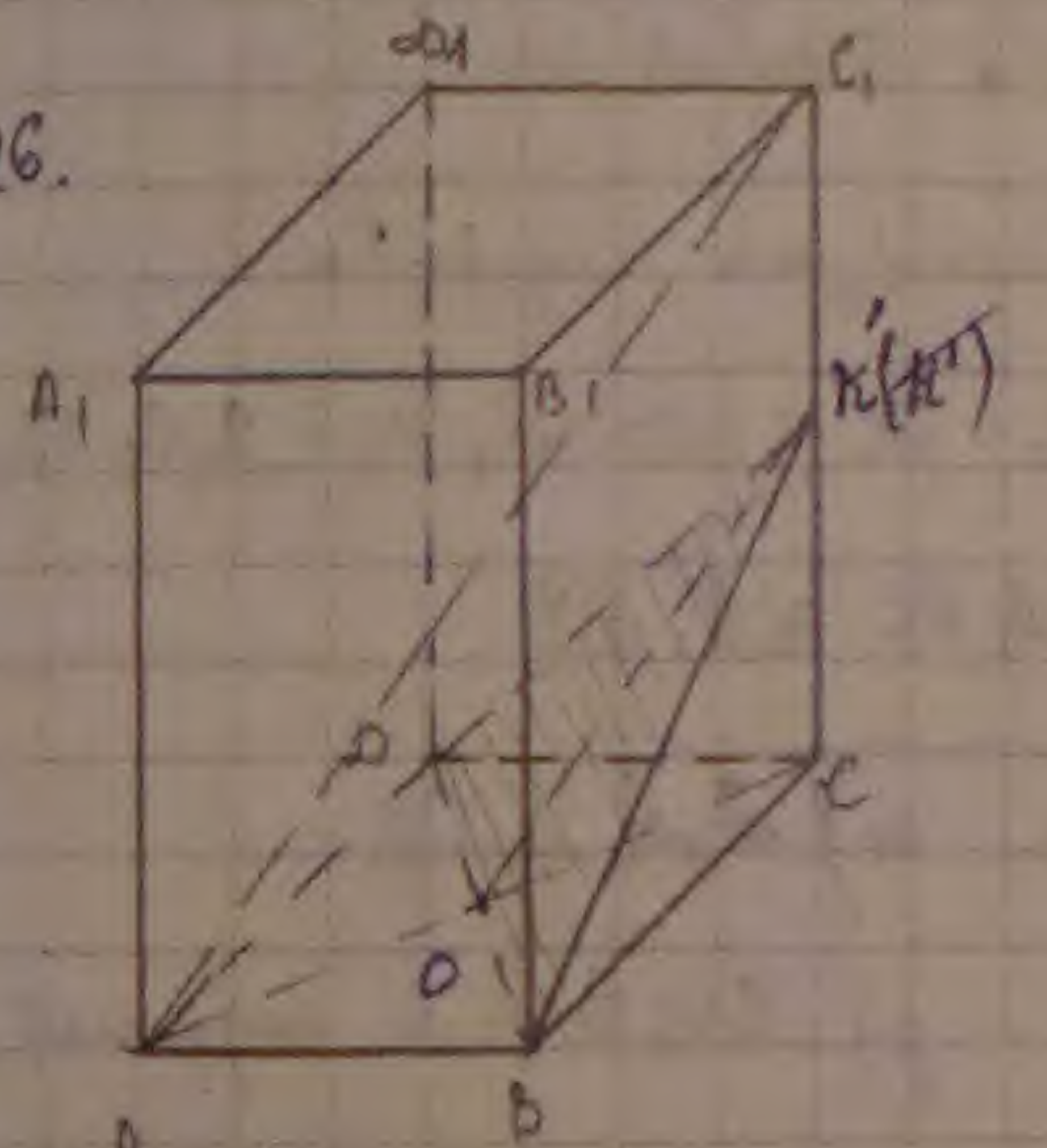
$CC_1 \perp (ABC) \Rightarrow CC_1 \perp AC \Rightarrow \Delta AC_1C$-ն ուղղանկյուն եռ. է:

Համաձայն պայմանի պարզեցնելով՝

$AC = \frac{\sqrt{2}a}{2}$, $AC_1 = a \Big\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$.

Այսինքն $\angle C_1AC = 45°$:

226.



Տրված է

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ կանոնավոր քառանկյուն

պրիզմա

$(DBK) \parallel AC_1$

$CC_1 = 4$սմ

$BC = 2$սմ

$S(DBK')$ -?

Տանենք DB և AC անկյունագծերը: Որպեսզի AC_1-ը զուգահեռ լինի DB-ով անցնող որևէ հարթության, անհրաժեշտ է և բավարար, որ AC_1-ը $\parallel$ լինի (BDK')-ին $\in$-ող որևէ ուղղի: Դիտարկենք ΔACC_1-ը: Անկյունագծերի հատման O կետով տանենք OK' ուղիղը:

$\left.\begin{matrix} OK' \parallel AC_1 \\ AO = OC \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Այն CC_1 կողը կհատի K' կետում

$(K'DB)$-ն կլինի AC_1-ին զուգահեռ հարթությունը:

Քանի որ $\left.\begin{matrix} OK' \parallel AC_1 \\ AO = OC \end{matrix}\right\} \Rightarrow$, որ համաձայն միջին գծի $CK' = C_1K' = 2$սմ

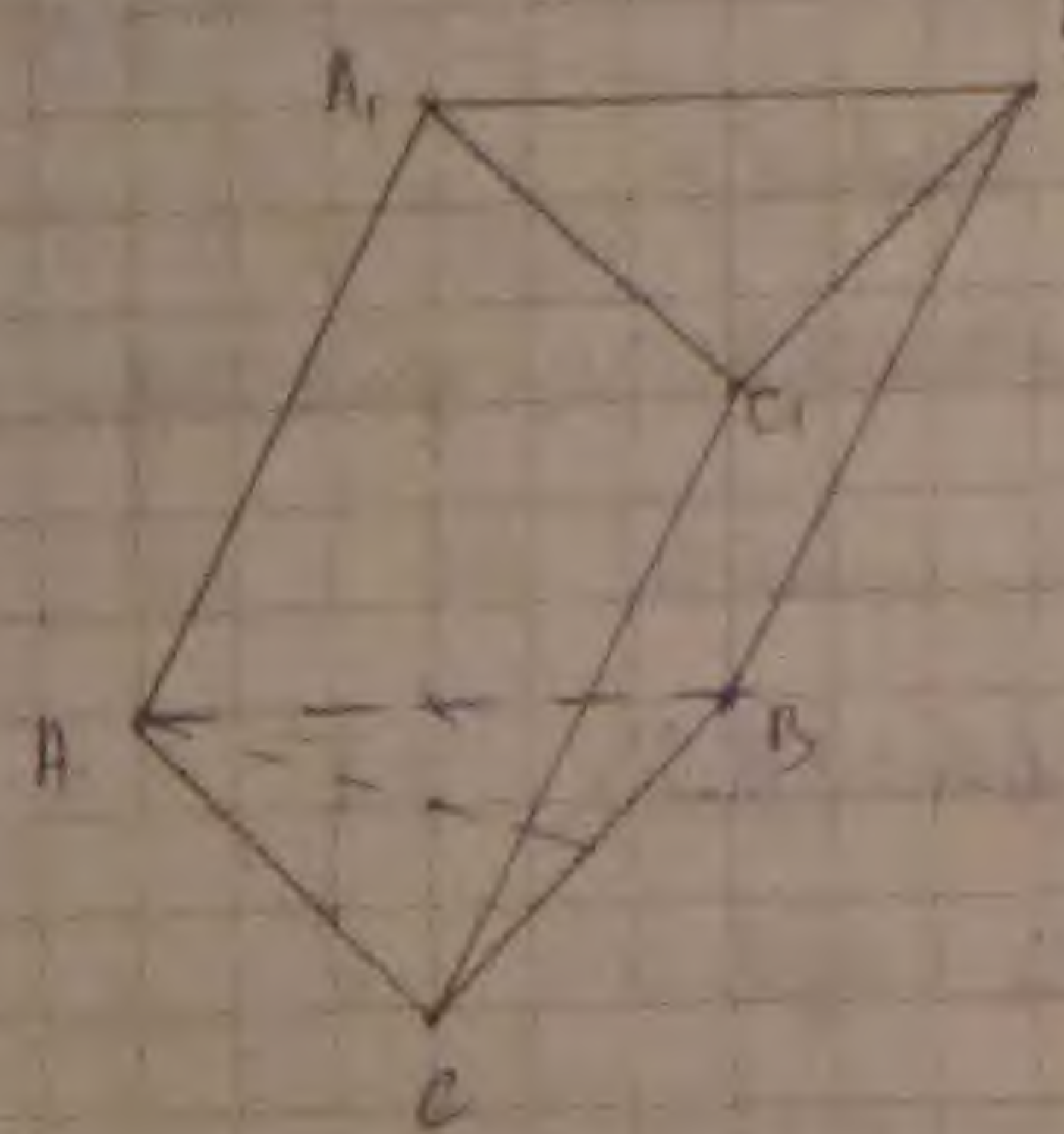
Համաձայն է $\Delta BK'C$-ն $\left.\begin{matrix} BC = CK' = 2\text{սմ} \\ \angle BCK' = 90° \end{matrix}\right\} \Rightarrow$, որ $BK' = AC = DK' = 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DBH' = \angle BDH' = \angle DH'B = 60^\circ$

$S_{\Delta DBH'} = \frac{1}{2} DH' \cdot BH' \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ սմ^2

Պատ՝ $S_{\Delta DBH'} = 2\sqrt{3}$ սմ^2

227.



Տ․ պրիզմա v

Եռանկյուն պրիզմա

$AB = AC = BC = A_1B_1 = A_1C_1 = B_1C_1$

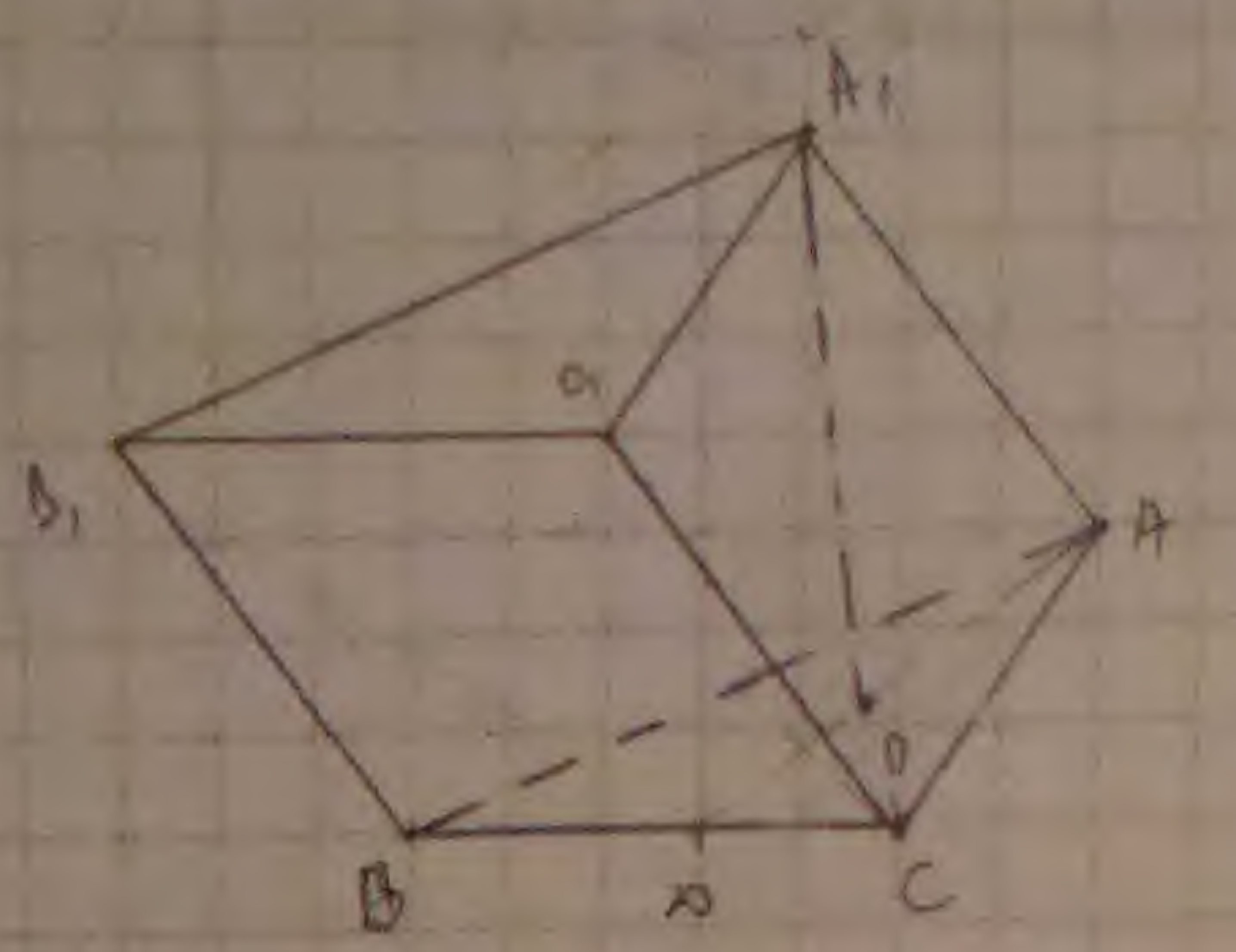
$\angle A_1AC = \angle A_1AB$

Ապ. ա) $A_1A \perp CB$

բ) CC_1B_1B-ն ուղղանկյուն է

ա) Դիցուք A_1 կետից ABC հարթությանը տանենք A_1H ուղղահայացը (H-ն A_1H ուղղի և (ABC)-ի հատման կետն է։ Այդ կետից AC և AB կողմերին տանենք ուղղահայացներ HK_1-ը և HK_2-ը, K_1 և K_2 կետերը հիմքերն են։ Երբ $AC \perp KK_1$-ին՝ A_1K_1 թեքի պրոյեկցիային ապա ըստ երեք ուղղահայացների թեորեմի $AC \perp$ է նաև թեքին՝ A_1K_1-ին։ Նույն կերպ $A_1K_2 \perp AB$։ Քանի որ A_1AK_1-ը և (A_1AK_2-ը) ուղղանկյուն եռ. են, որոնց AA_1 ներքնաձիգը ընդհանուր է, $\angle A_1AC = \angle A_1AB \Rightarrow \Delta A_1AK_1 = \Delta A_1AK_2$

228.



Տրված է

$ABCA_1B_1C_1$ թեք պրիզմա,

որտեղ $AB = AC = 13$սմ

$BC = 10$սմ

$A_1O \perp (ABC)$

O-ն ΔABC-ի միջնագծերի հատման կետն է

$\angle A_1AO = 45^\circ$

$S_{BB_1C_1C}$ - ?

$BC \perp OA$ (քանի որ $AB = AC$ և $BD = DC$) $\Rightarrow BC \perp AA_1$

$AA_1 \parallel CC_1 \Rightarrow BC \perp CC_1$: Հետևաբար BB_1C_1C ուղղանկյուն է.

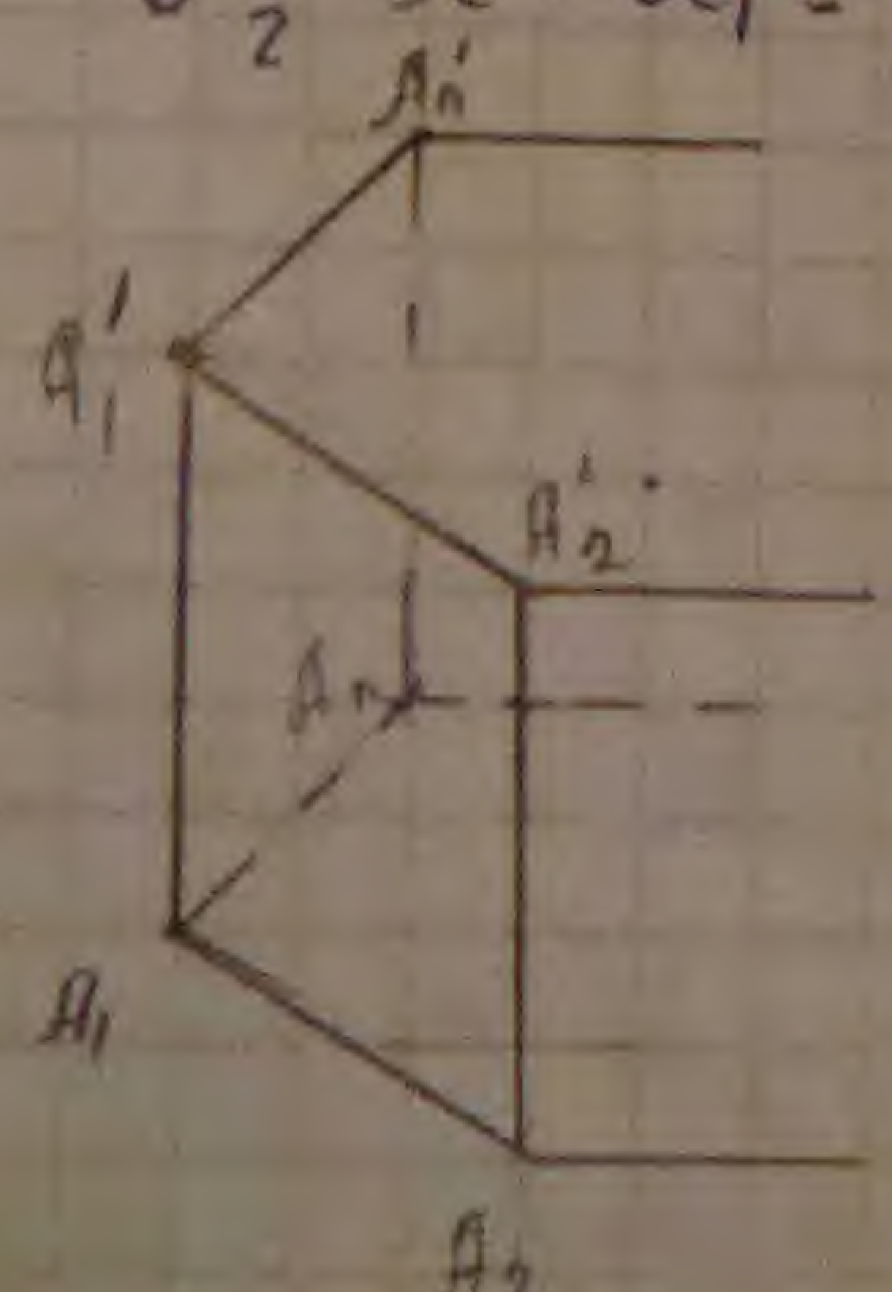
Պյութագորասի թեորեմից՝

$\left.\begin{matrix} AB = AC = 13\text{սմ} \\ BC = 10\text{սմ} \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD = 12$սմ

$AO = \frac{2}{3} AD = 8$սմ $\Rightarrow AA_1 = \frac{AO}{\cos 45^\circ} = \frac{8 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$սմ $= CC_1$

$S = BC \cdot CC_1 = 8\sqrt{2} \cdot 10 = 80\sqrt{2}$

229



Տրված է

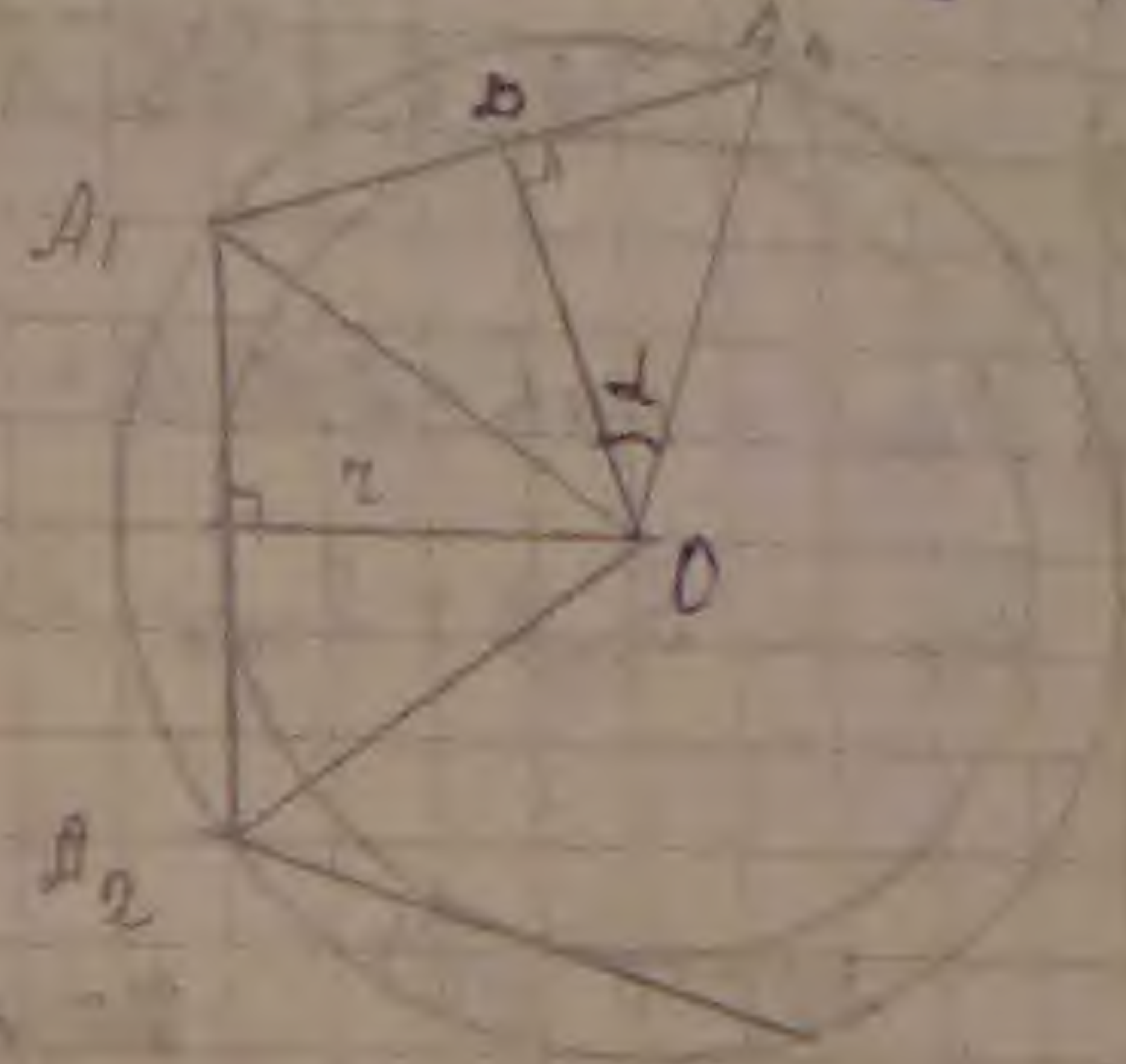
$A_1A_2 \ldots A_n B_1B_2 \ldots B_n$ կանոնավոր պրիզմա

$A_1'A_1 = h$

$A_1A_2 = a$

$S_{կողմ}$ և $S_{լրիվ}$ - ?

Կանոնավոր պրիզմայի կողմնային նիստը ուղղանկյուն է (օրինակ $A_1A_1'A_2'A_2$) հետևաբար $S_1 = ah$ և կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ $S_{կողմ} = nah$:



Հիշենք, որ ցանկացած կանոնավոր բազմանկյան մակերեսը՝ $S = \frac{1}{2}Pr$ (3), որտեղ r-ը բազմանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղն է:

r-ն արտահայտենք a-ով (բազմանկյան կողմով):

$\angle DOA_n$-ը նշ. α-ով. $\alpha = \frac{360}{2n} = \left(\frac{180}{n}\right)^\circ$

$$tg\alpha = \frac{a}{2r} \Rightarrow r = \frac{a}{2tg\alpha} = \frac{a}{2tg\frac{180}{n}} \quad (1)$$

$$S_{OA_1A_2O} = \frac{1}{2}ar = \frac{a^2}{4tg\frac{180}{n}}$$

$$2S_{հիմք} = \frac{na^2}{2tg\frac{180}{n}}$$

$$P = na \quad (2)$$

(1)-ը և (2)-ը (3)-ում

$$S = \frac{1}{2}\cdot na\cdot\frac{a}{2tg\frac{180}{n}} = \frac{na^2}{2tg\frac{180}{n}}$$

$$S_{լր} = S_{կողմ} + S_{հիմք} = nah + \frac{na^2}{2tg\frac{180}{n}}$$

Որոշենք լր. մակերեսը, եթե $n = 3$, $a = 10$սմ, $h = 15$սմ

բ) $n = 4,\ a = 12$ դմ, $h = 8$ դմ

գ) $n = 6;\ a = 23$ սմ, $h = 5$ դմ $= 50$ սմ

դ) $n = 5,\ a = 0{,}4$ մ $= 4$ դմ, $h = 10$ սմ $= 0{,}1$ մ

ա) $S_{կողմ} = nah = 3 \cdot 10 \cdot 15 = 450$ սմ^2.

$S_{լր} = S_{կողմ} + S_{հիմ} = nah + \dfrac{na^2}{2 tg \frac{180^\circ}{n}} = 450 + \dfrac{300\sqrt{3}}{2} =$

$= \dfrac{300(6+\sqrt{3})}{2} = 150(6+\sqrt{3}) \approx 580$ սմ^2

բ) $S_{կողմ} = nah = 4 \cdot 12 \cdot 8 = 384$ սմ^2

$S_{լր} = nah + \dfrac{na^2}{2 tg \frac{180^\circ}{n}} = 384 + \dfrac{4 \cdot 144}{2} = 672$

գ) $S_{կ} = nah = 6 \cdot 23 \cdot 50 = 6900$ սմ^2

$S_{լր} = nah + \dfrac{na^2}{2 tg \frac{180}{n}} = 6900 + \dfrac{6 \cdot 23^2}{2 \cdot \sqrt{3}} = 7815$ սմ^2

դ) $S_{կ} = nah = 5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$ մ^2

$S_{լր} = 0{,}4 + \dfrac{5 \cdot 0{,}4^2}{2}$

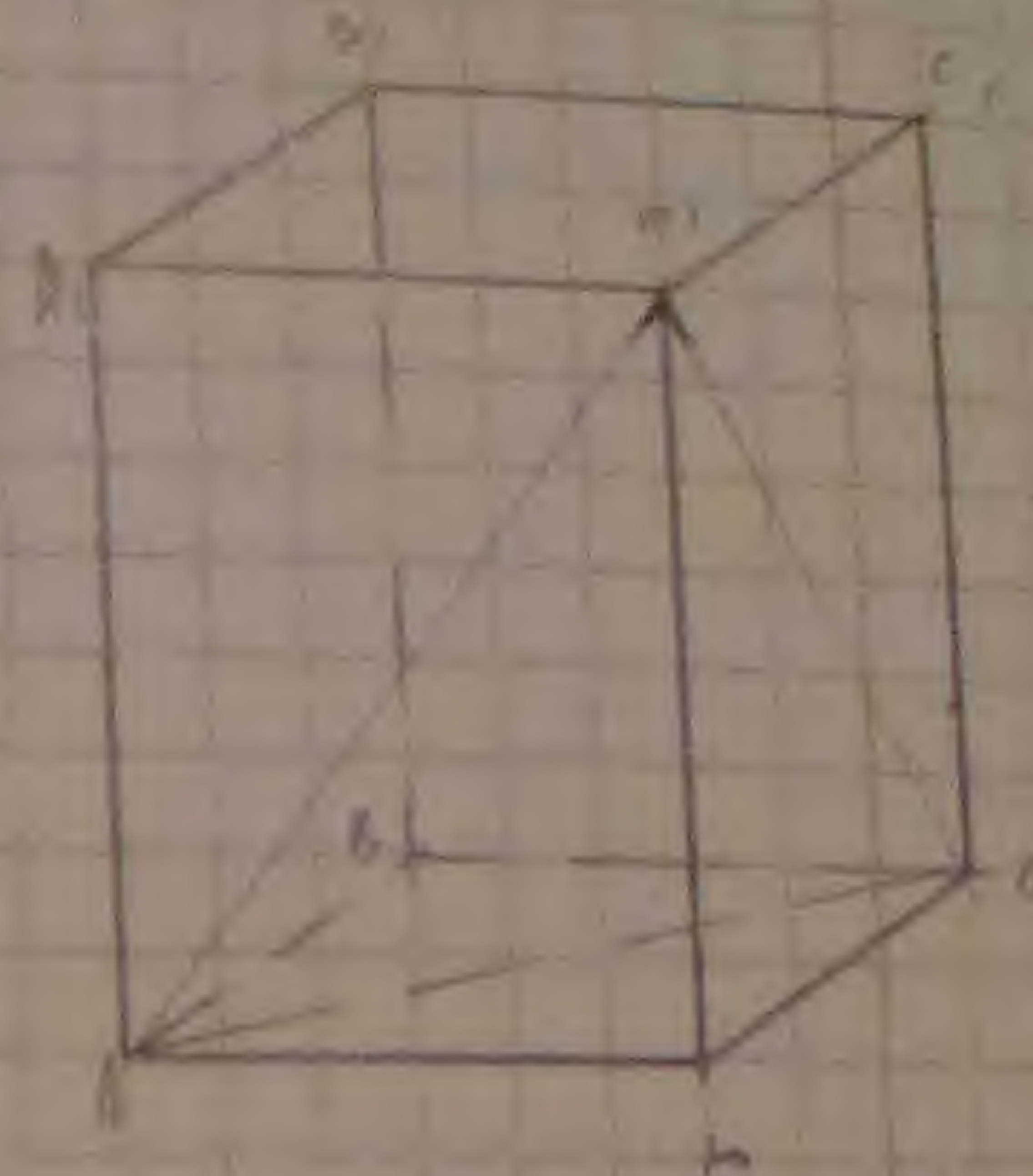
[illegible] 298.

14 [illegible] 35. [illegible]

$AB_1 = 4,\ CB_1 = 5$

$\underline{\angle AB_1C = 60^\circ}$

$V - ?$



[illegible] $AB = x \Rightarrow BB_1 = \sqrt{16 - x^2}$

$BC = \sqrt{25 - 16 + x^2} = \sqrt{9 + x^2}$

[illegible] $AC^2 = 16 + 25 - 2 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} = 21$

$(AC^2 = AB^2 + CB^2 = 16 - x^2 + 9 + x^2 = 21)$

$AC^2 = AB^2 + CB^2 = 21$

$AB^2 = 21 - CB^2$

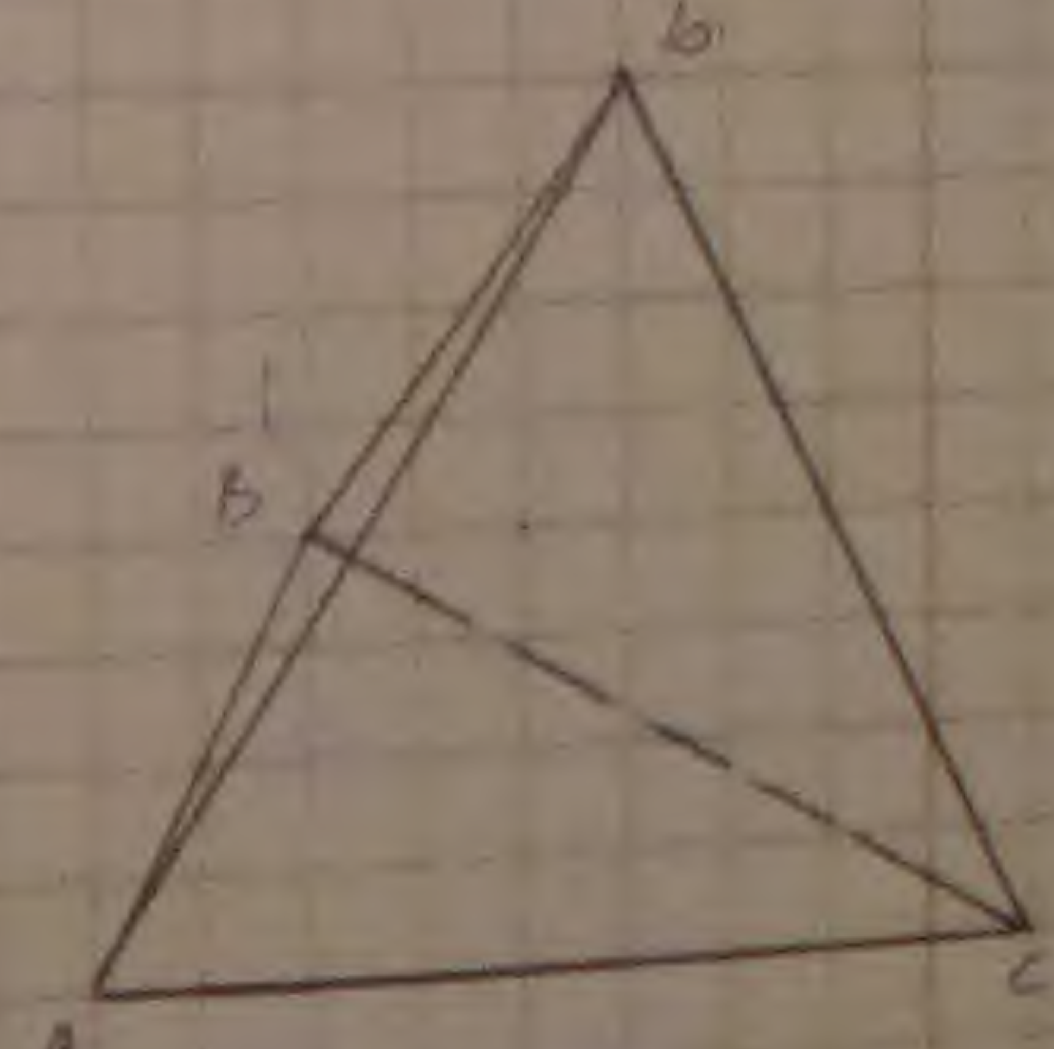
$CB^2 = CB_1^2 - BB_1^2$

$AB^2 = AB_1^2 - BB_1^2$

$AB_1^2 - BB_1^2 = 21 - CB_1^2 + BB_1^2$

$2BB_1^2 = AB_1^2 + CB_1^2 - 21 = 16 + 25 - 21 = 20.$

$BB_1^2 = 10 \Rightarrow BB_1 = \sqrt{10}$



$2x^2 = 2$

$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

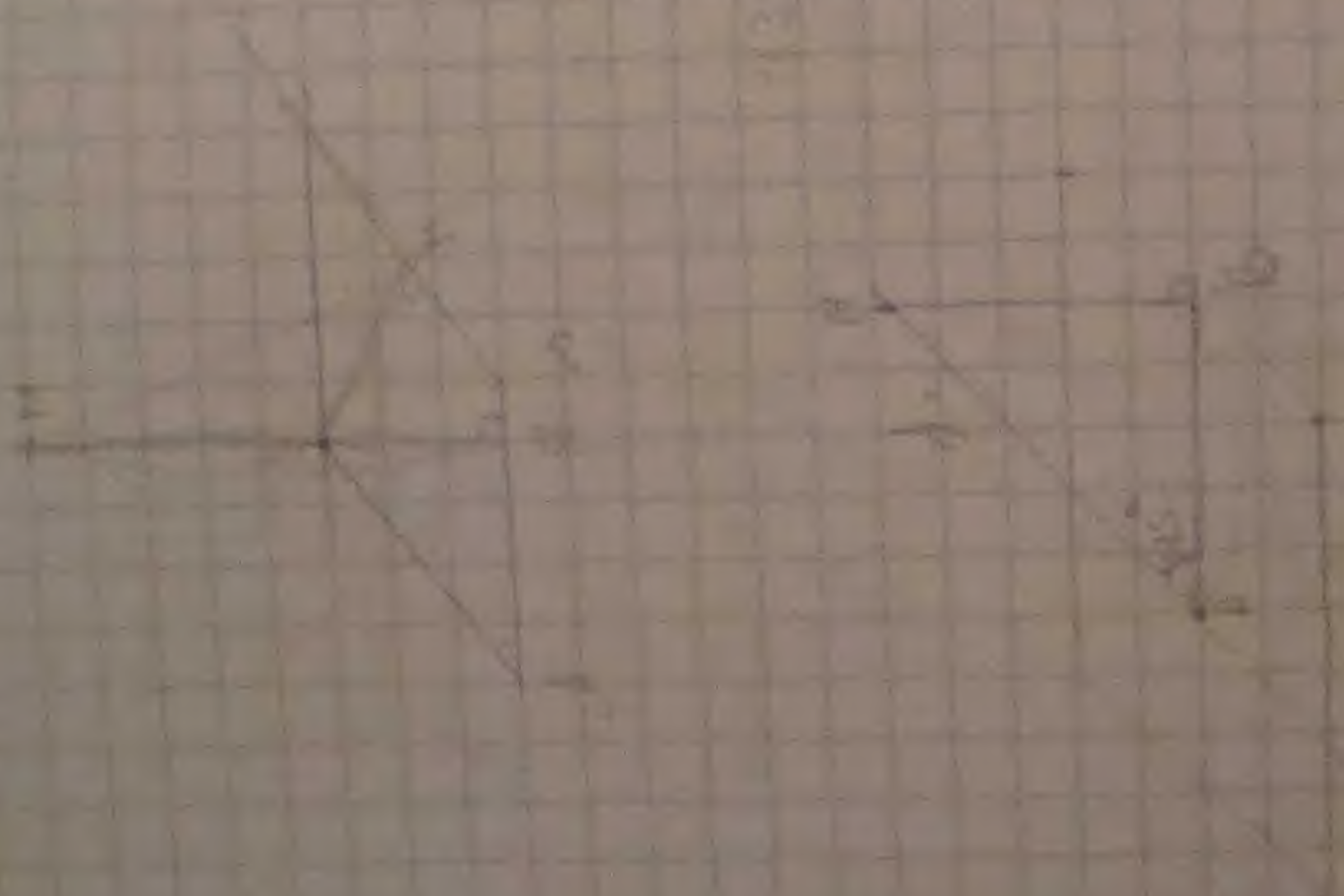
$b^2 = \frac{a^2}{2} + a^2 = \frac{a^2 + 2a^2}{2}$

$15^2 - 12^2 = 225 - 144$

$AP_1 = 24$

$AD_1 = 30$

$PC = 11$



$\angle ABC$ [illegible] է

$MO \perp ABC$

[illegible] ΔMOA; ΔMOC և ΔMOB

[illegible] [illegible] (OM – [illegible] [illegible] է 1 [illegible])

[illegible] $AM = BM = CM =$ [illegible]

$OA = OC = OB$

$BK = BO = \frac{1}{2} AC$

205

$4 + 9 = 13 \quad \sqrt{\sqrt{13} \cdot 3 + 1} =$

$= \sqrt{3\sqrt{3} + 1}$

20.8

$OK = 9$ см

$\angle LKM = 90°$.

$LM - ?$

$\sin 45° = \frac{9}{LK}$

$LK = \frac{9}{\sin 45} = \sqrt{2}\,9 =$

$KM = \frac{9}{\sin 30°} = 2 \cdot 9 = 18$

18
18
144
18
324
162
486

$LM = \sqrt{18^2 + 2 \cdot 81} = \sqrt{486}$

~~486 = 2·243~~ $= \sqrt{81 \cdot 4 + 81 \cdot 2} = 9\sqrt{6}$

213

$\alpha\ A_1\ K_2 = a$

$AA_1 = a$

$OA_1 = \frac{1}{3} AA_1 = \frac{1}{3} a$

$\cos \alpha = \frac{1}{3}$

$\alpha = \arccos \frac{1}{3}$

215

$\alpha MN \beta = 60°$

$AB \parallel Cb.$

$AB \subset \beta$

$Cb \subset \alpha.$

$h_1 = 6,5$ см

$h_2 = 8$ см

$AC^2 = h_1^2 + h_2^2 - 2h_1 h_2 \cdot \frac{1}{2} =$

$= 4225 + 64 - 52$

$$\begin{array}{r} 4225 \\ 12 \\ \hline 4237 \end{array}$$

$\sqrt{4237}$

141

$\angle MN\,\beta = 60^\circ$

$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ CD \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} AB \parallel \alpha \\ AB \subset \beta \end{array}\right. \quad \alpha \cap \beta = MN \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \parallel MN$ / тогда и $CD \parallel MN$

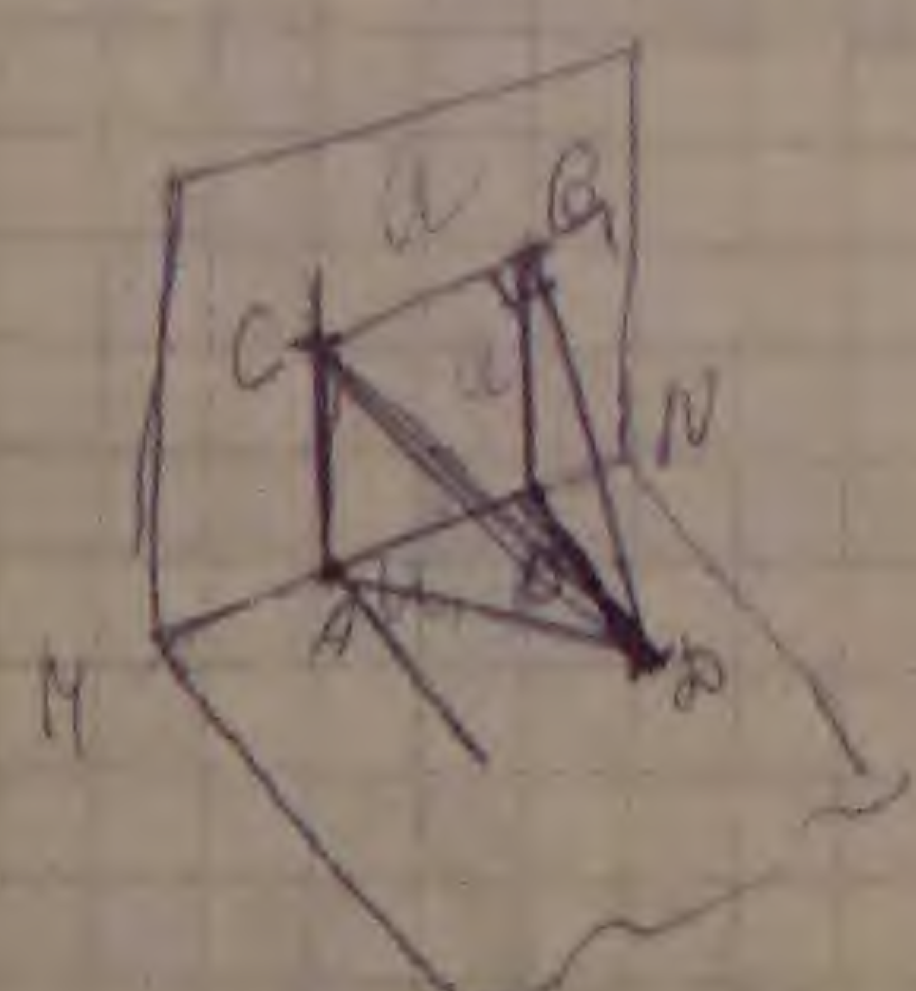
$EK \perp MN$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} MN \perp EK \\ MN \perp KL \end{array}\right\} \Rightarrow MN \perp EKL$

$KL \perp MN$

$EL \perp AB \quad EL \perp CD$ $\quad$ $\Rightarrow MN \perp KL$

$CD \parallel MN \parallel AB$

216



N

$AB = AC = BD = a$

$BC_1 \perp MN \quad BC_1 = a.$

$\angle CB_1D = 120^\circ \quad C_1D = \sqrt{2}\,a$

$CD = \sqrt{a^2 + 2a^2} = 3a^2 = \sqrt{3}\,a$

$BC_1 \perp MN$

$BC_1 = a$

$\angle C_1BD = 120^\circ$

$\left.\begin{matrix} MN \perp BC_1 \\ MN \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN \perp (BC_1D) \Rightarrow MN \perp C_1D$

$CC_1 \parallel MN \Rightarrow CC_1 \perp C_1D$

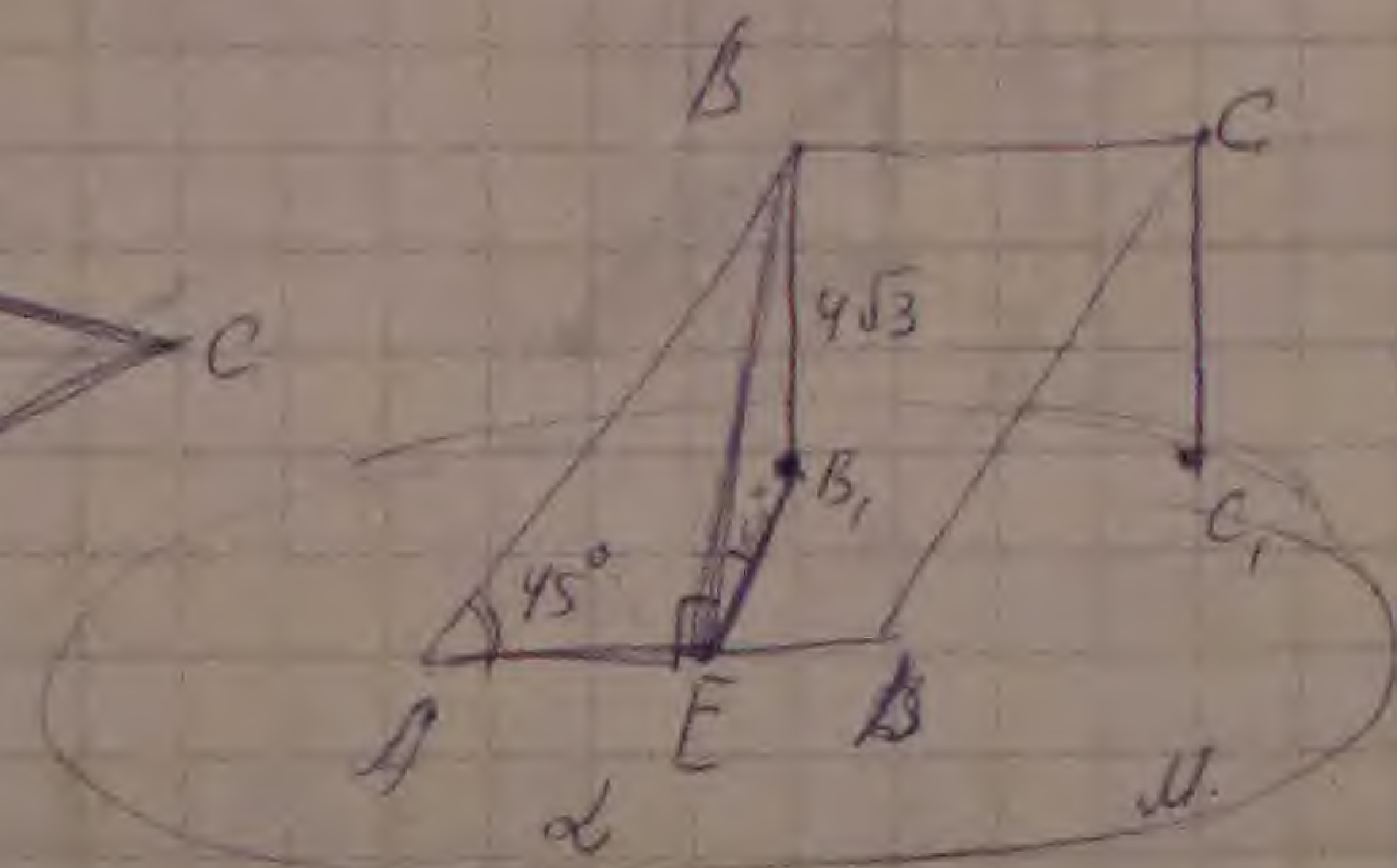
$\triangle CC_1D$ 1) $C_1D^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\left(-\frac{1}{2}\right)$

$C_1D^2 = 3a^2$

2) $\triangle CC_1D$ – п/у

$CD = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$

176



$BE \perp AD$

$BB_1 \perp \alpha$

$AD = B_1E$

$\angle BEB_1 = 60^\circ$

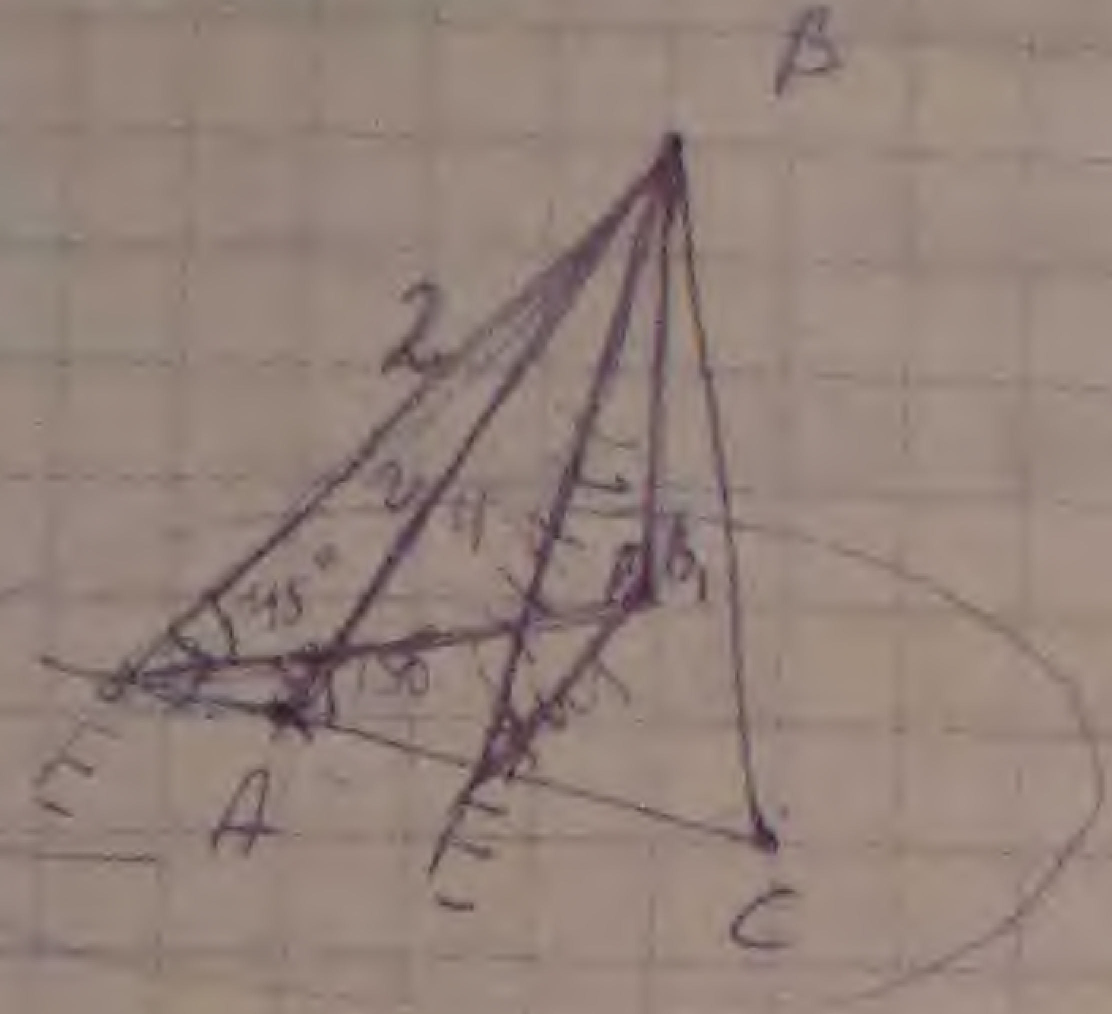
$\triangle BB_1E$ – п/у

$\sin 60^\circ = \frac{BB_1}{BE}$

$BE = \frac{2 \cdot BB_1}{\sqrt{3}} = 8$

$AB = 8 \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

170 Гл. 14-й ряд 1-18 + 13-й ряд 4 клетки 1



$\angle BEB_1 = 45°$

$\angle BAC = 150°$

$AB = 2$ см

BB_1 - ? BE - ?

Рш

$AB = 4$

173.

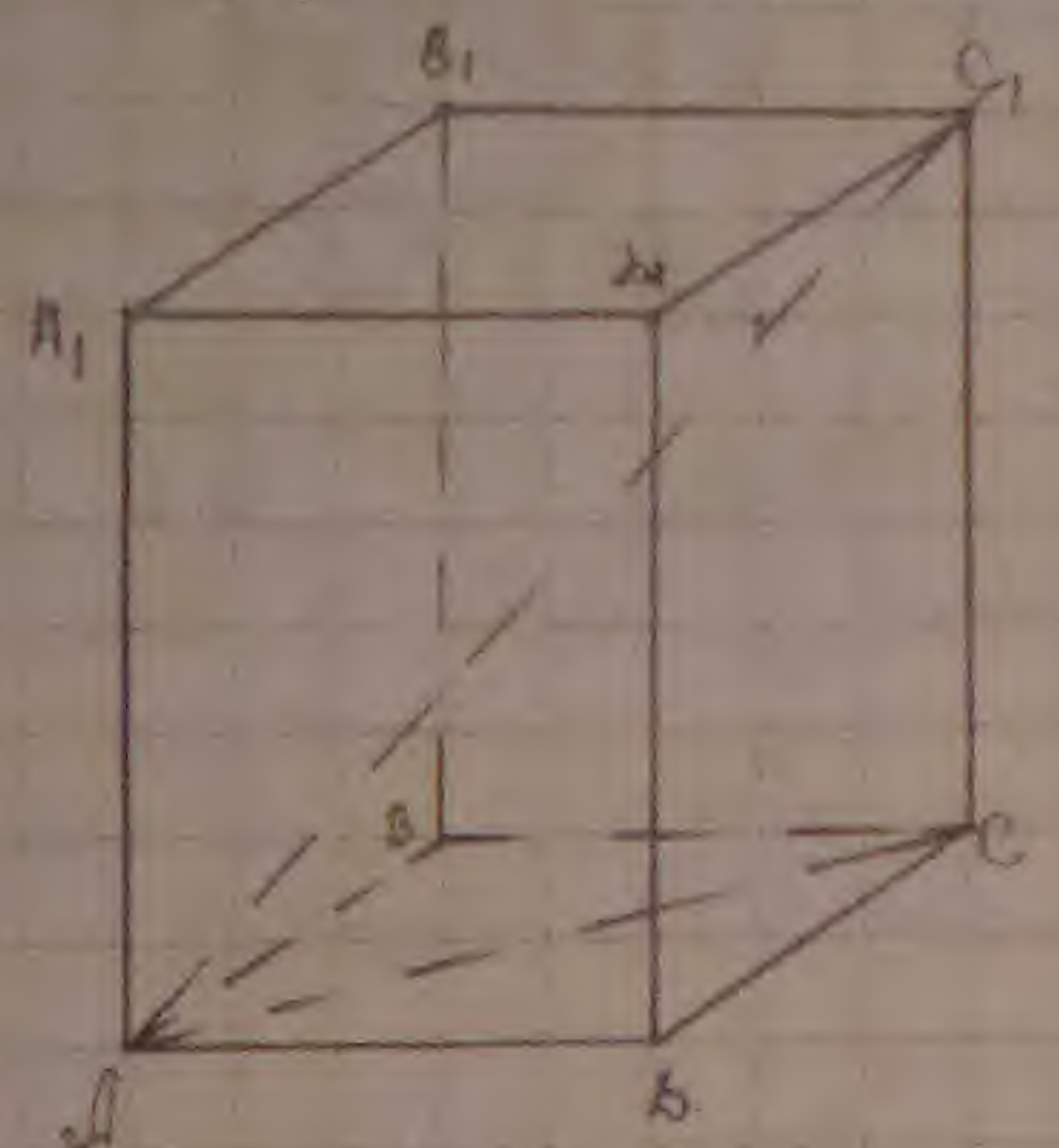
$\angle ACD = 90°$

$AB = BC = AC = 6$

$BD = 3\sqrt{7}$

Քանիլ 13ա

4.



Տրված է ուղղանկյունանիստ

$S_{հատ.} = 10$

$AB = 13$

$BC = 4$

$V - ?$

Ուղղանկյան զուգահեռանիստի անկյունագծային հատույթը ուղղանկյուն է, որի անկյունագիծն է AC_1 և կողմերից մեկը՝ C_1C-ն: $ABCD$-ն ուղղանկյուն է, քանի որ ուղղանկյունանիստ անկյունանիստի հիմքը ուղղանկյուն է, իսկ ուղղանկյան բոլոր անկյունները ուղղանկյուն են ⇒ $\angle ABC = 90^\circ$

Դիտ. է ΔABC-ն

$$\left.\begin{array}{l} AB = 13 \\ BC = 4 \\ \angle ABC = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow AC = \sqrt{169+16} = \sqrt{185}$$

Այժմ նկատենք ΔACB-ն ուղղ. է ($CC_1 \perp ACB$ (որպես ուղղ-անկյունանիստի կողմնային կող) ⇒ $CC_1 \perp AC$, դրանից $\angle ACC_1 = 90^\circ$)

Դիտ. է ΔACC_1-ը

$$\left.\begin{array}{l} S_{BACC_1} = 10 \\ \angle ACC_1 = 90^\circ \\ AC = \sqrt{185} \end{array}\right\} \Rightarrow CC_1 = \frac{2S}{AC} = \frac{20}{\sqrt{185}} = \frac{20\sqrt{185}}{185} = \frac{4 \cdot \sqrt{185}}{37}$$

$$V = AB \cdot BC \cdot BB_1 = \frac{13 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sqrt{185}}{37} = \frac{208\sqrt{134}}{37}$$

8. [illegible]

$P_{ABCD} = 30$

$S_{AA_1B_1B} = 135$

$S_{BB_1C_1C} = 90$

$V - ?$

AB [illegible] a, BC [illegible] b, BB_1 [illegible] c

$$\begin{cases} ac = 135 \\ bc = 90 \\ a+b = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{135}{15-b} \\ c = \frac{90}{b} \\ a = 15-b \end{cases} \Rightarrow \frac{135}{15-b} = \frac{90}{b}$$

$$135b = \cancel{1350}-90b$$

$$\cancel{215}\,45b = 1350$$

$$b = \frac{\cancel{240}}{45}\ 30$$

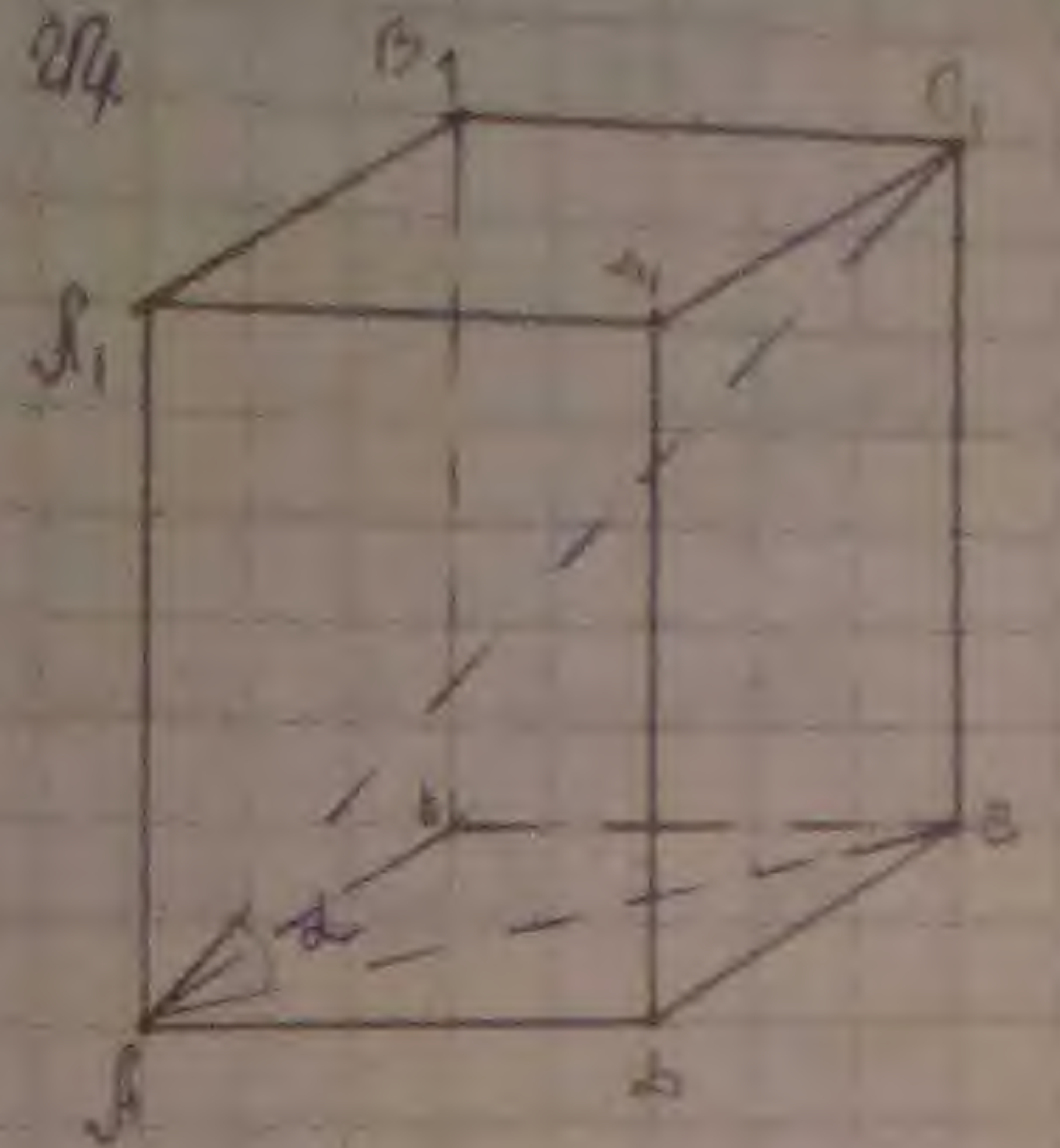
$a = 15$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{135}{c} \\ b = \frac{90}{c} \\ \frac{135+90}{c} = 15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c = 15 \\ a = 9 \\ b = 6 \end{cases}$$

$$V = abc = 810$$

12. Նկ



Տրված է ուղ. զուգահեռանիստ

$\alpha = 30^\circ$

$AB = 6$

$BC = 8$

$S_{կողմ} - ?$

$CC_1 \perp ABC \Rightarrow AC$-ն AC_1-ի պրոյեկցիան է $\Rightarrow \alpha = \angle CAC_1$

ըստ Պ. ΔABC

$\left.\begin{matrix} AB = 6 \\ BC = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC = 10$

ըստ. ΔACC_1-ից

$\left.\begin{matrix} \angle ACC_1 = 90^\circ \\ \angle CAC_1 = 30^\circ \\ AC = 10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow CC_1 = AC \cdot tg30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

$S_{կող} = P \cdot CC_1 = 28 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} = \frac{280\sqrt{3}}{3}$

Պատ.: $S_{կողմ} = \frac{280\sqrt{3}}{3}$

16. Տրված է ուղղ. պրիզ.

$\alpha = 30^\circ$

$AB = 2\sqrt{2}$

$BC = 4$

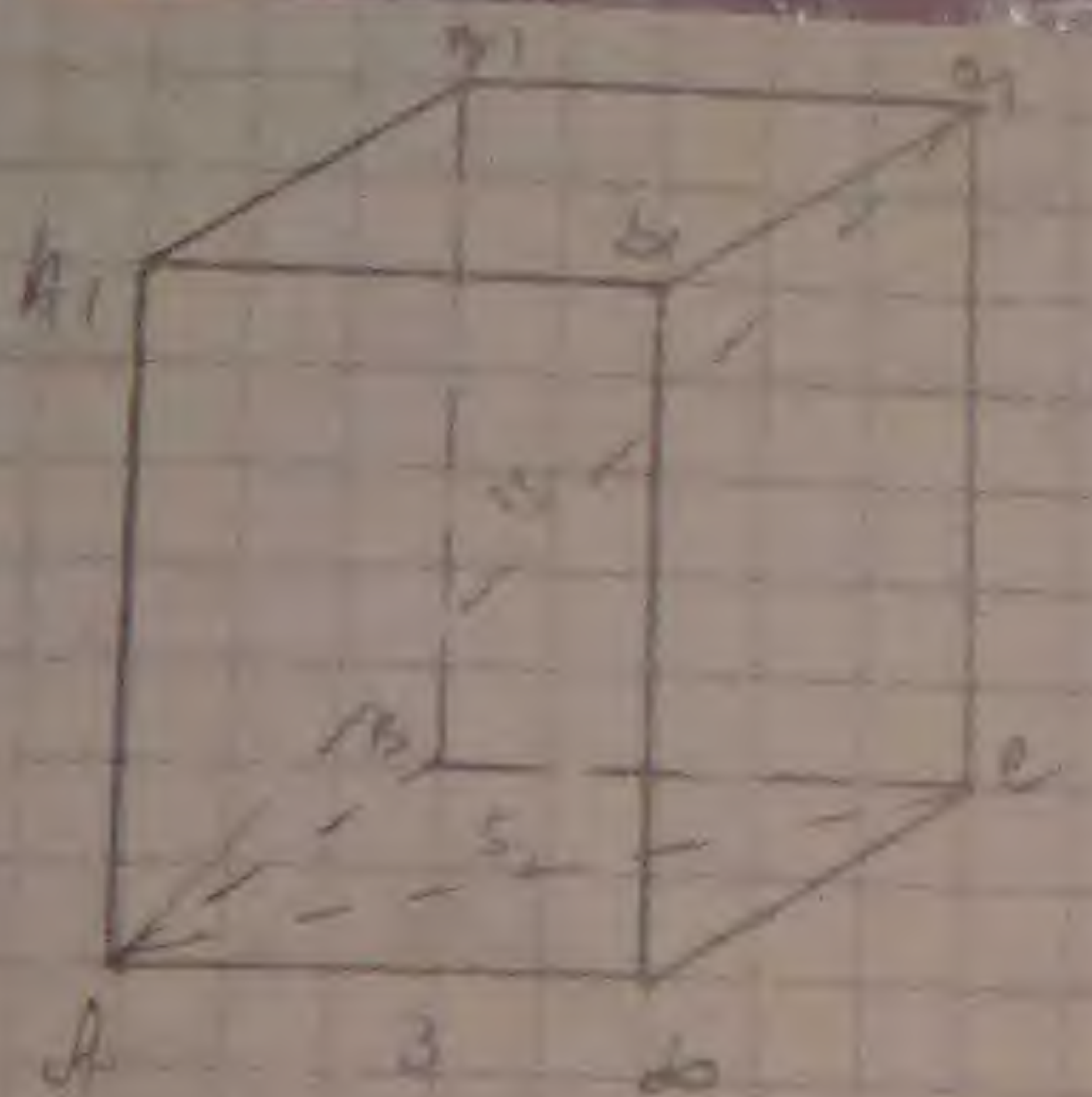
$V - ?$

$AC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$CC_1 = tg30^\circ \cdot AC = 2\sqrt{2}$

$V = 2\sqrt{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} = 32$

27.



Տրված է ուղղ. զուգ.

$AC_1 = 13$

$AC = 5$

$AB = 3$

$V - ?$

Դիտենք ՝ ΔABC-ն

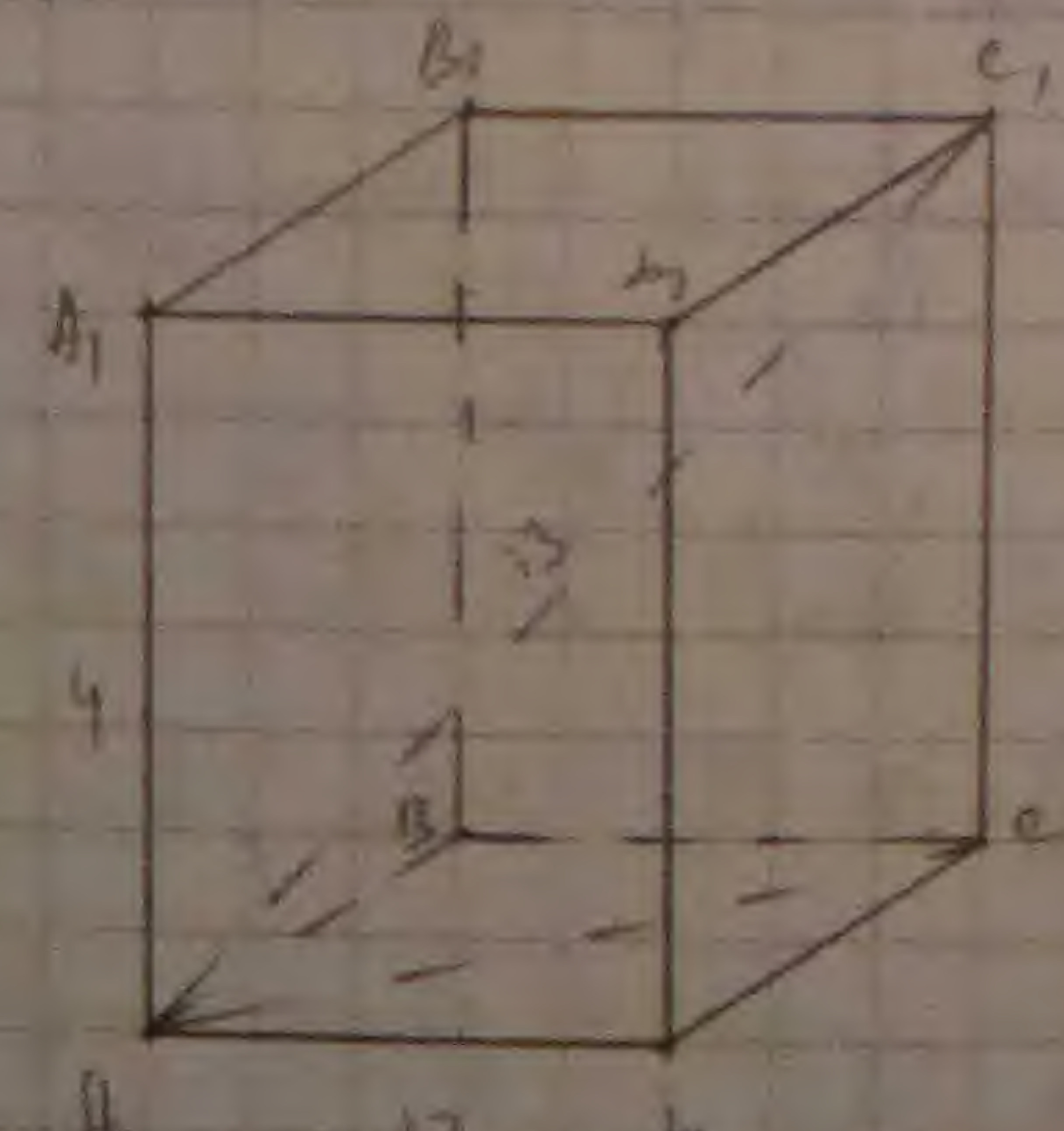
$BC = 4$

Դիտենք ՝ ΔACC_1

$CC_1 = 12$

$V = AB \cdot BC \cdot CC_1 = 12 \cdot 4 \cdot 3 = 144$

28.



Տրված է ուղղ. զուգ.-նիստ

$CC_1 = 4$

$AB = 12$

$AC_1 = 13$

$V - ?$

Դիտենք ՝ ΔCC_1A-ն

$AC = \sqrt{153}$

դիտարկենք ΔABC-ն

$BC = 3$

$V = 3 \cdot 12 \cdot 4 = 144$

32. Պրիզմայի [illegible]

$AC_1 = 9$

$AB = 6$

$BC = 3$

$S_{լրիվ} - ?$

դիտ. ΔABC

$AC = 3\sqrt{5}$

$CC_1 = 6$

$S_{լրիվ} = S_{կողմ} + 2S_{հ} = CC_1 \cdot P + 2 \cdot AB \cdot BC =$

$= 6 \cdot 18 + 2 \cdot 6 \cdot 3 = 144$

36. $S_{կողմ} = 348$

$P_{հ} = 29$

$S_{...} = 30$

$V - ?$

AB-ն եղ. a, BC-ն b, BB_1-ը c

$c = \frac{S_{կողմ}}{P_{հ}} = \frac{348}{29} = 12$

$b = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2,5$

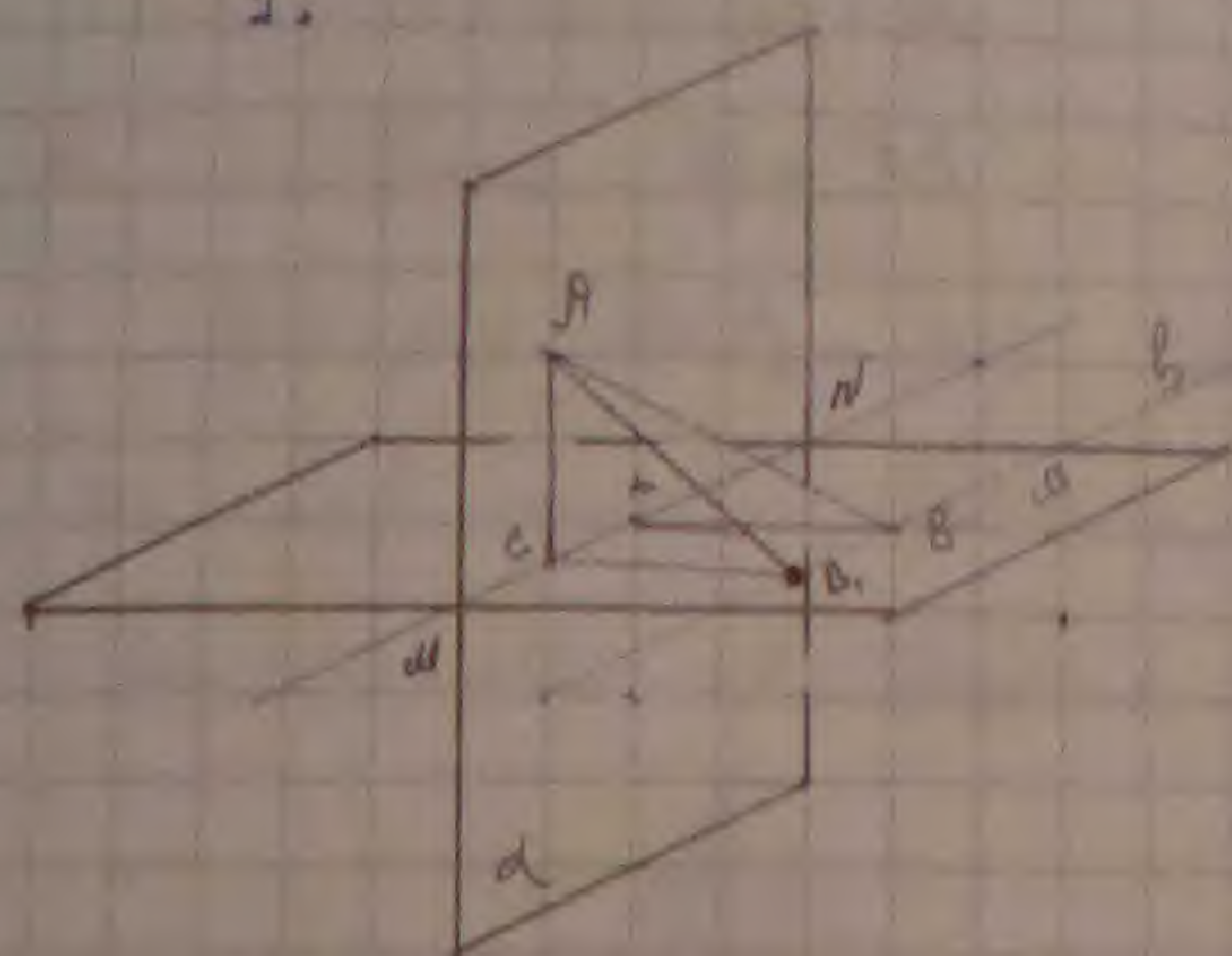
$a = 12$

$V = abc = 144 \cdot 2,5 = 360$

40. Ապացուցել, որ b ուղղից ... [illegible] ?

Տարբերակ 4-րդ

1.



Տրված է

$\alpha \perp \beta$

$AC \perp MN$

$Bb \perp MN$

$AC = 3$; $Bb = 4$; $Cb = 12$

AB - ?

b կետով տանենք MN-ին զուգահեռ b ուղիղը։ C կետով β հարթության մեջ տանենք MN-ին ուղղահայաց ուղիղ, որը կհատի b-ն B_1 կետում։ Ըստ որ $Bb \perp MN$ և $B_1C \perp MN$ ⇒ $Bb \parallel B_1C$. Այսպիսով $Cb \parallel BB_1$ ⇒ $Bb = B_1C$ ⇒

$AB_1 = 5$ ($\angle ACB_1 = 90^\circ$; $BC = 3$; $CB_1 = 4$ (Պյութագորասի ΔACB_1-ից)):

Այստեղից ΔAB_1B-ն ուղղ. է ($b \perp CB_1$, CB_1-ը AB_1-ի պրոյեկցիան է, ուստի $AB_1 \perp b$) ⇒ $AB = 13$

Պատ.՝ 13

18.

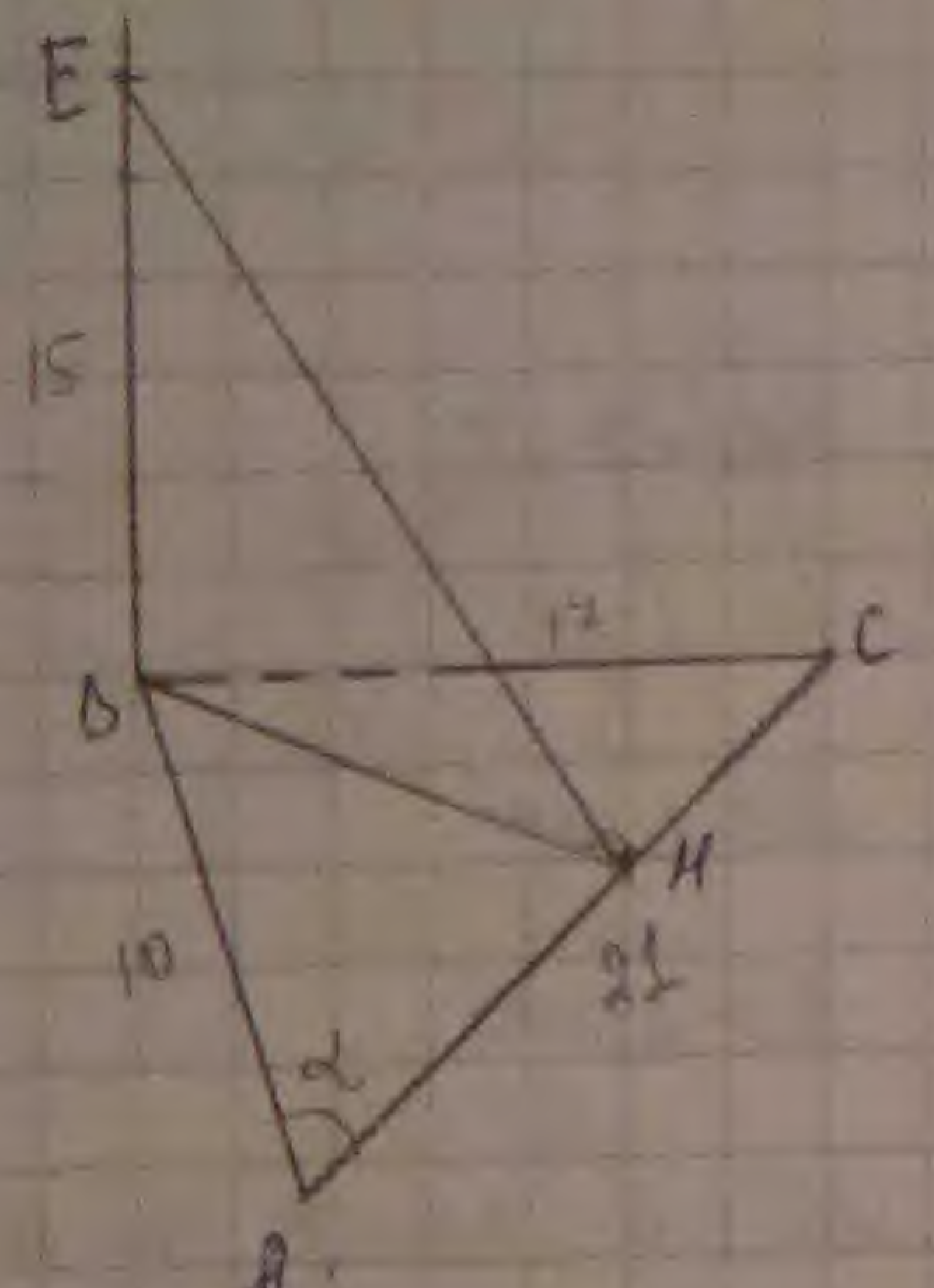
Տրված է

ΔABC - ն

$AB = 10$
$BC = 17$
$AC = 21$

$BE = 15$

h - ?



[illegible] E կետից ABC [illegible] [illegible] 5 [illegible]

[illegible] [illegible] AC-ին, [illegible] 5 [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] AC-ին:

Տանենք $BH \perp AC$ [illegible]; H-ը [illegible] E-ին

EH -ը $\perp AC$-ին; Գտնենք $EH = h$ հեռավորությունը

ΔABC-ում գտնենք $\angle BAC$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{100 + 441 - 289}{2 \cdot 10 \cdot 21} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB\cos\alpha = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6 \Rightarrow$$

$BH = \sqrt{100-36} = 8$

Ըստ Պ. $\angle$ ΔBEH-ից

$EH = \sqrt{225+64} = 17$

2. Բուրգ

Այն բազմանիստը, որի հիմքերից մեկը բազմանկյուն է, իսկ մյուս նիստերը ընդհանուր գագաթ ունեցող եռանկյուններ են, կոչվում է բուրգ

SABCD բուրգ

$SO \perp (ABC)$

$SE \perp$ [illegible]

233.

$AB = 5$

$AC = 8$

$SO = 7$

$\sqrt{65}$ և $\sqrt{53}$

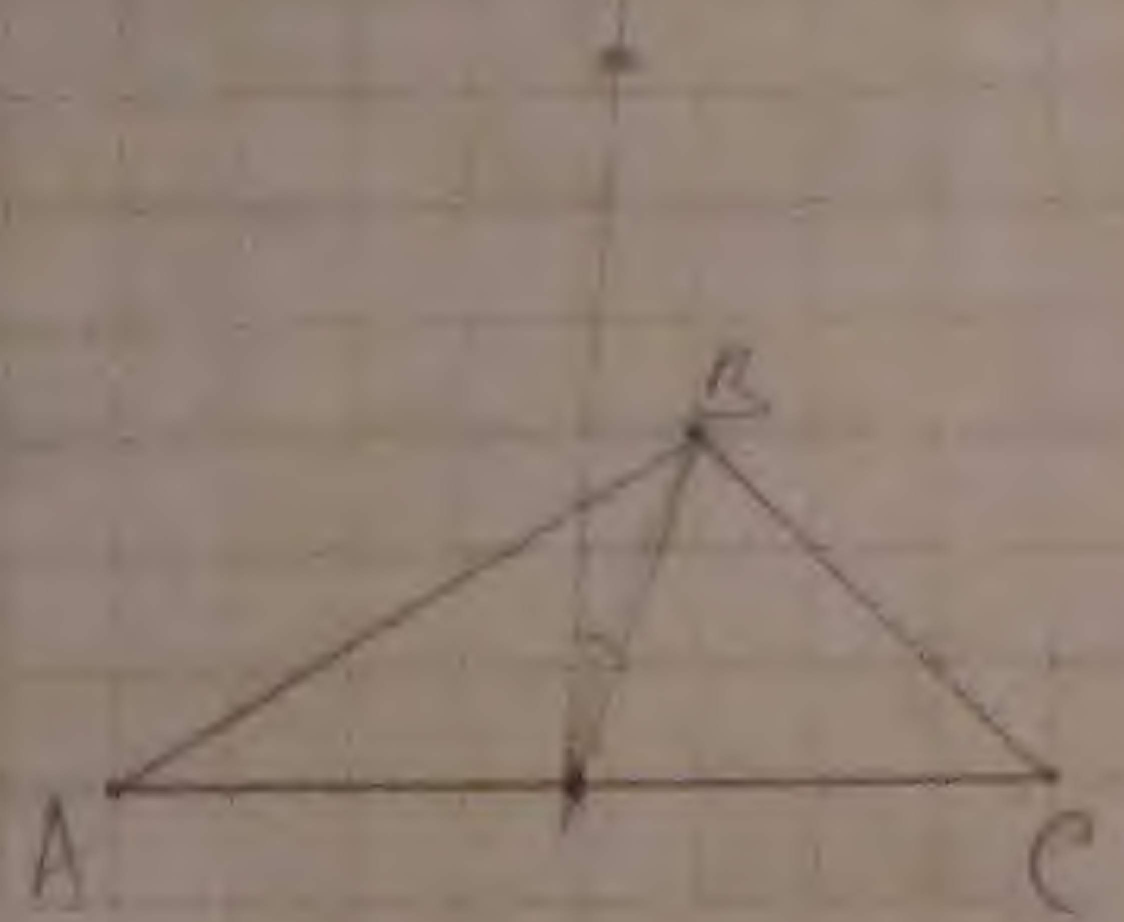
$\Delta SHC = \Delta SHA$ (SH – общ., ∠, $AH = HC$) $\Rightarrow SA = SC$

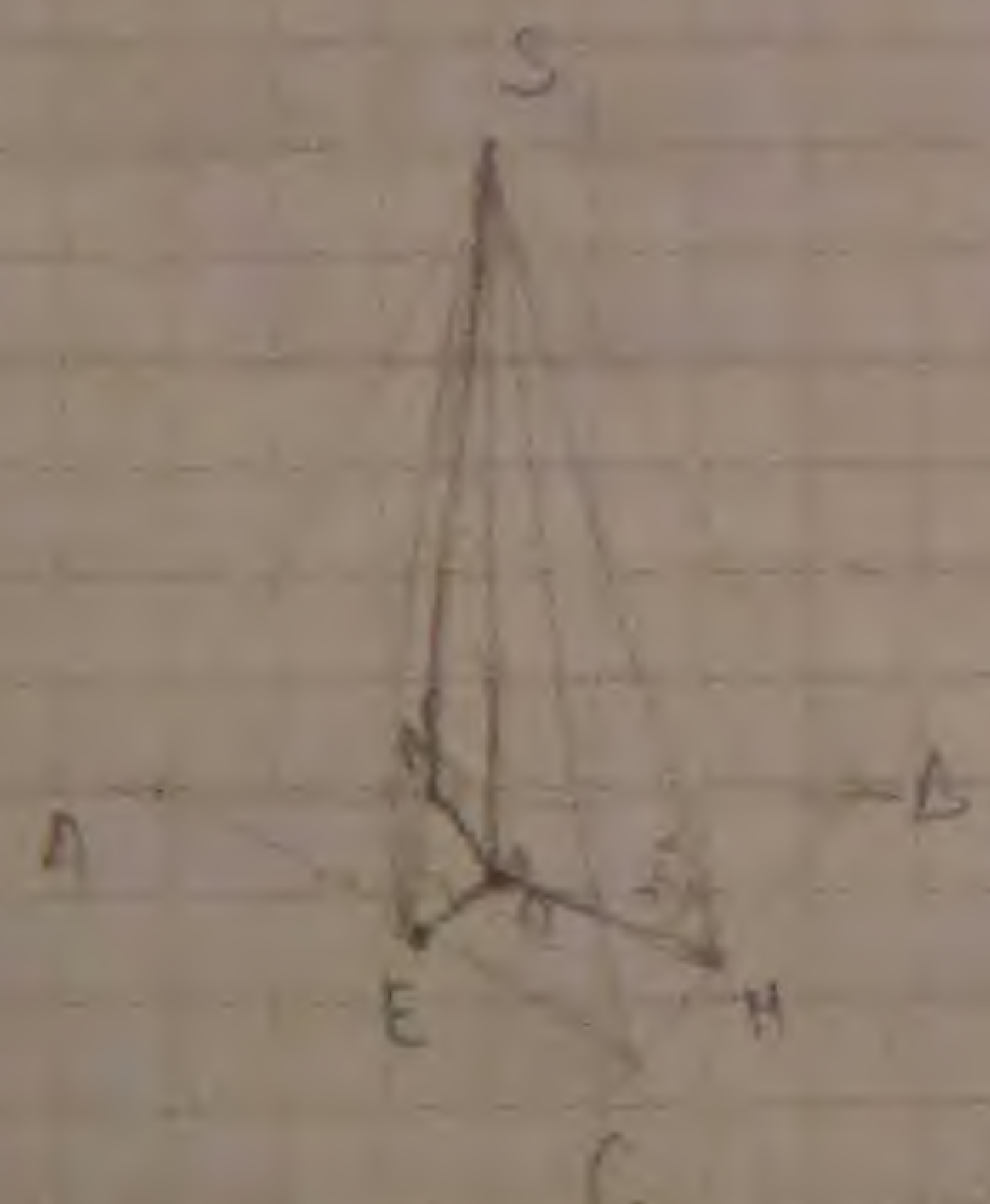
$\Delta SBH = \Delta SDH$ (SH общ., $BH = HD$) $\Rightarrow SB = SD$

248.

$AB = BC = 10$

$AC = 12$





$SO \perp (ABC)$

$OE \perp AC$

$ON \perp AB$

$OH \perp OB$

$ON = OE = OE = OS$

Д. 232–251

13 з рис 1–15

247.

$\triangle ABD = \triangle DBC = \triangle DCA =$

ш) О – ц. вписан. кол.

$OE \perp AC \Rightarrow AC \perp DE \Rightarrow \angle DEO$ – л. к.

$OK \perp BC$ · · $\angle DKO$ – л. к.

$OF \perp AB$ · · $\angle DFO$ – л. к.

$\alpha = \beta = \gamma$

Тому $\Delta DOE = \Delta DOF$ і ΔDOK ($DO \perp (ABC)$; OD – з

спільн. δ ; $\alpha = \beta = \gamma$) $\} \Rightarrow OE = OF = OK = r$

$\Rightarrow DE = DF = DK$

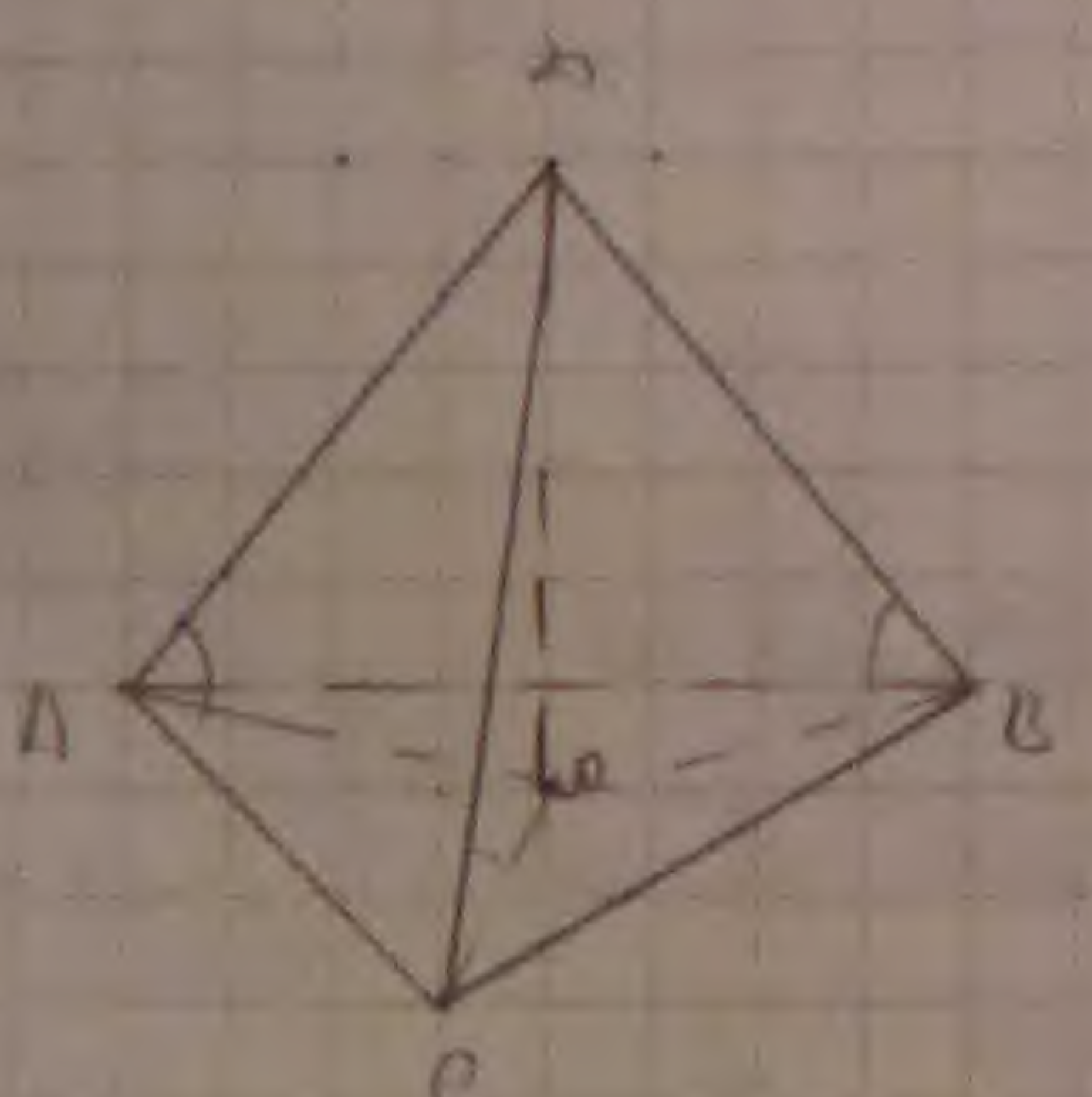
д) Дов. $S_б = \frac{P \cdot DE}{2}$

$S_б = \frac{1}{2} AC \cdot DE + \frac{1}{2} AB \cdot DF + \frac{1}{2} CB \cdot DK =$

$= \frac{1}{2} DE (AC + AB + CB) = \frac{P \cdot DE}{2}$

[illegible]

[illegible]



$DA = DB = DC$

[illegible] O [illegible]

[illegible]

[illegible]

$DO \perp (ABC) \Rightarrow \triangle ODA = \triangle ODB = \triangle OCD$ ([illegible]

[illegible]) $\Rightarrow OA = OB = OC = R$

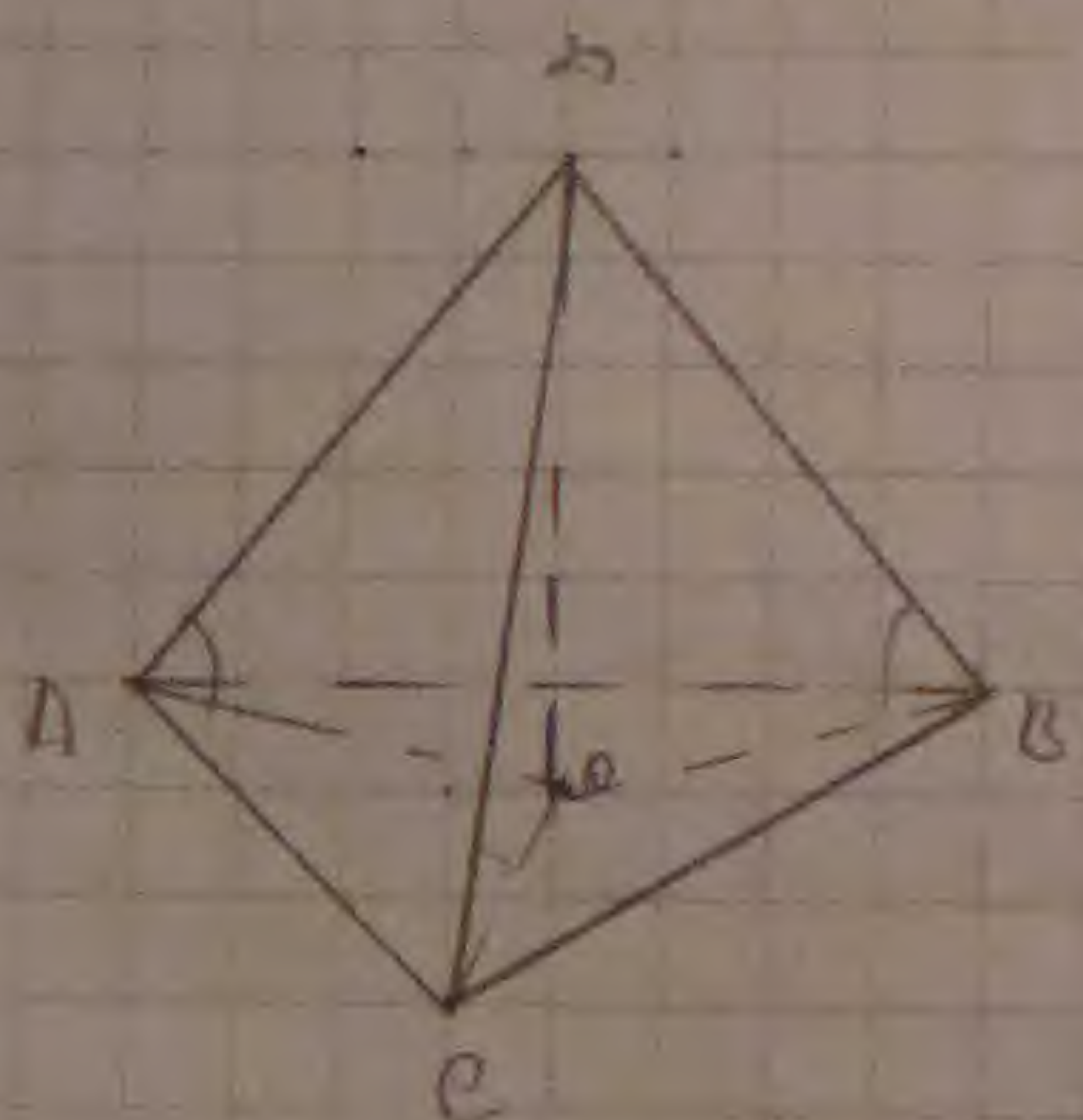
$\Rightarrow \angle DAO = \angle DBO = \angle DCO$

[illegible]

[illegible]

849.

[illegible]



$ԴA = ԴB = ԴC =$

[illegible] O-[illegible]

[illegible]

[illegible]

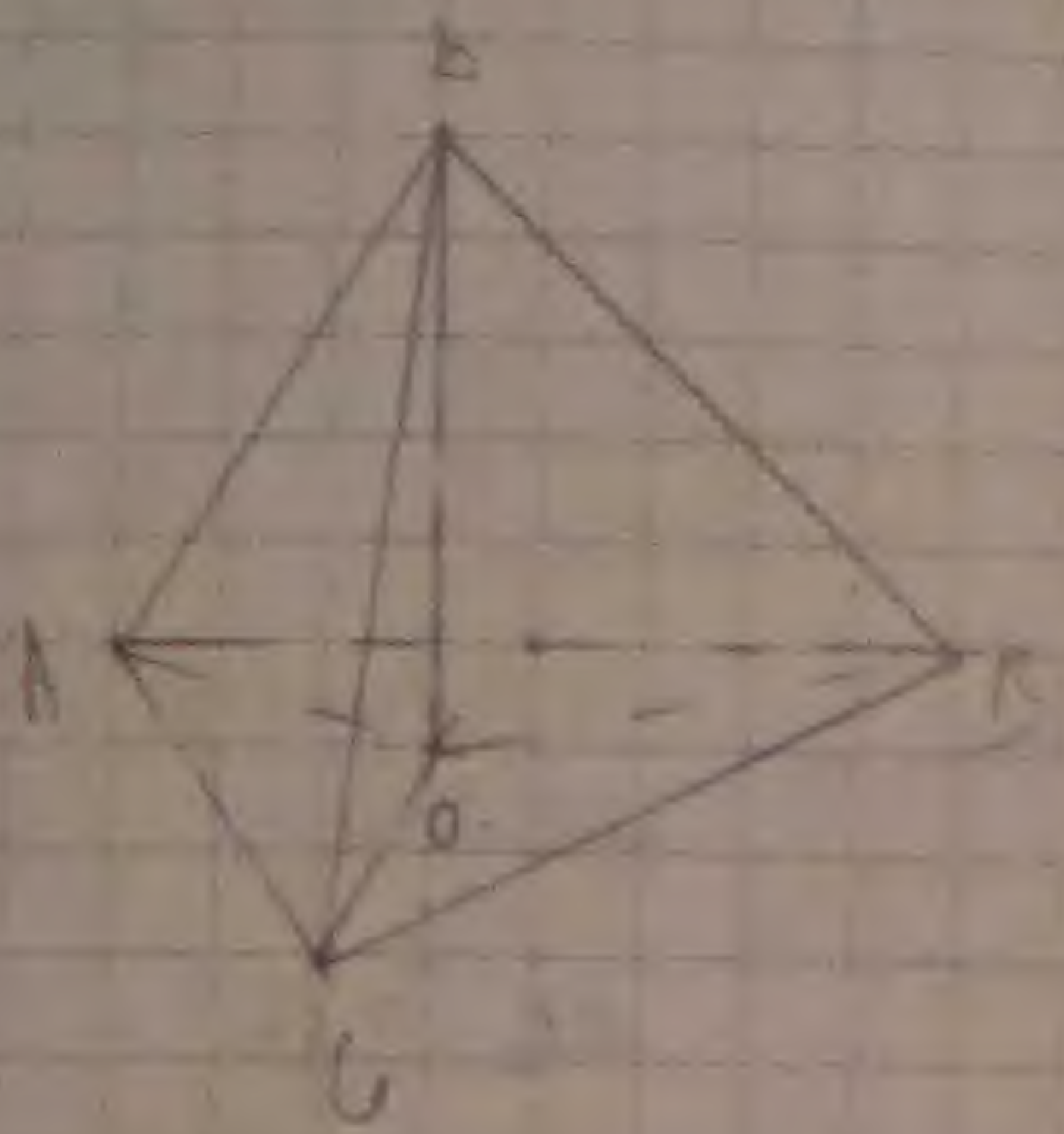
$OԴ \perp (ABC) \Rightarrow \Delta OAԴ = \Delta OBԴ = \Delta OCԴ$ ([illegible]) $\Rightarrow OA = OB = OC = R$

$\Rightarrow \angle ԴAO = \angle ԴBO = \angle ԴCO$

[illegible] 3 [illegible]

[illegible]

250.



$\angle ACB = 120^\circ$

$DO = 16$

$\angle ADO = \angle BDO = \angle CDO = 45^\circ$

$S_{ABC} - ?$

$DO \perp (ABC) \Rightarrow \triangle ADO = \triangle DOB = \triangle DOC$ (по кат. и остр. углу) $\Rightarrow AO = OB = OC = R$

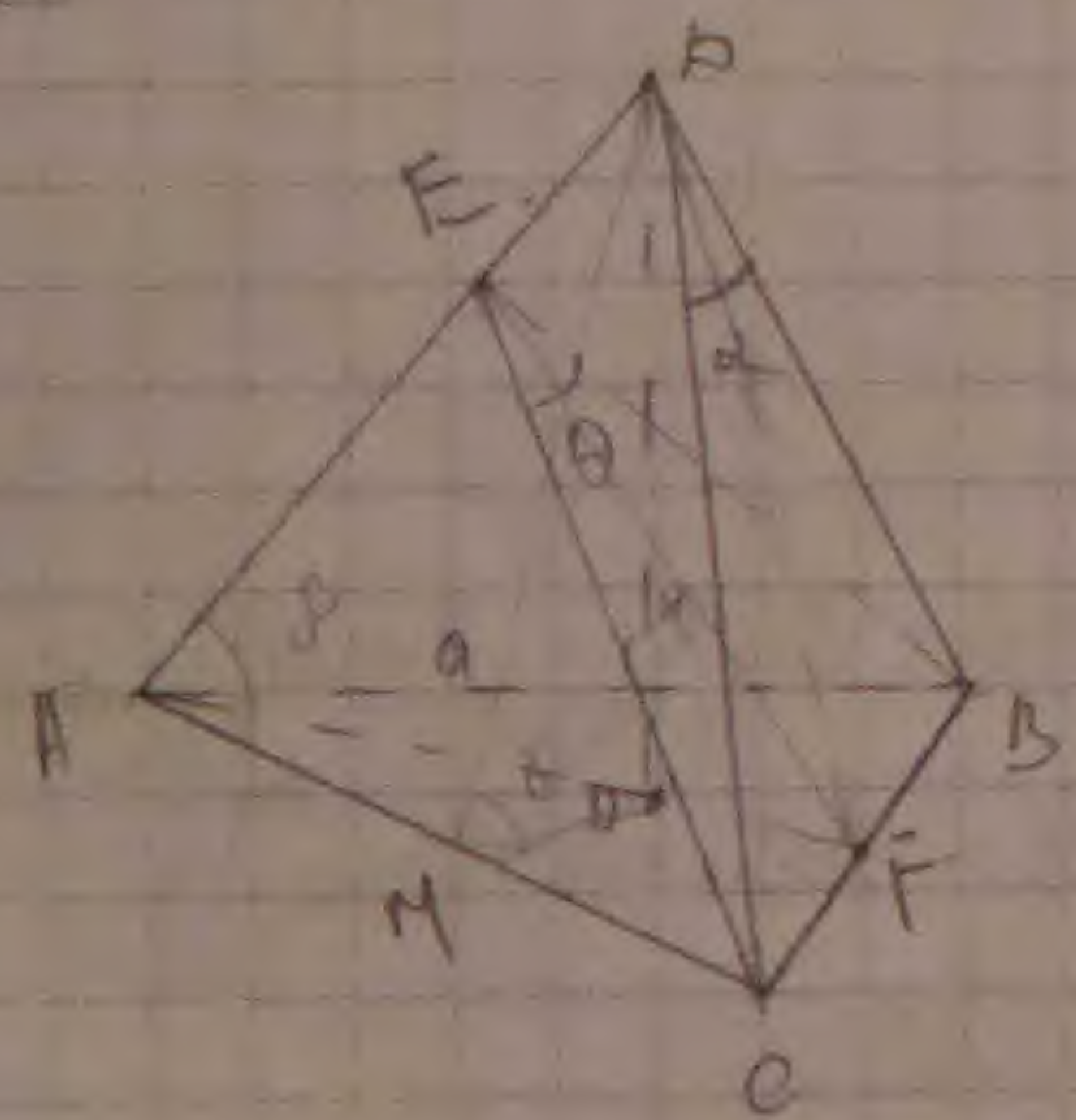
$R = OA = OB = OC = 16$

$S = \frac{1}{2} AC^2 \sin 120^\circ =$

$= \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 64\sqrt{3}$

253.

Дз 41



$DO = H$

$AB = a$

$AD - ?$

$E | \alpha - ?$

a) $DAC = \beta = ?$

γ) $\gamma = ?$

б) $EDAC = ?$

4. $AO = \frac{\sqrt{3}a}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

$AD = \sqrt{H^2 + \frac{1}{12}a^2} = \sqrt{\frac{12H^2 + a^2}{12}} = \frac{\sqrt{3H^2 + a^2}}{2}$

$\alpha = \quad R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$

a

$a_3 = R\sqrt{3}$

$a_4 = R\sqrt{2}$

$a_6 = R$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3H^2+a^2}}$$

1) $$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3H^2+a^2}}$$

$$\alpha = 2\arcsin\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3H+a^2}}$$

2) $$tg\,\beta = \frac{\sqrt{3}a}{3H}$$

$$\beta = arctg\frac{\sqrt{3}a}{3H}$$

3) $$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

ΔOHD – п/у

$$tg\,\delta = \frac{H}{OH} = \frac{H2\sqrt{3}}{a}$$

$$\delta = arctg\frac{2\sqrt{3}H}{a}$$

$DH \cdot EF = OH \cdot DF$

$$EF = \frac{H\,a\sqrt{3}/2}{\frac{\sqrt{3H^2+a^2}}{3}}$$

Տնային աշխատանք

288. Համապատասխան պրիզմայի յուրաքանչյուր կողմ պարունակում է հավասար կանոնավոր-Sk գագաթներ. Ապա ցույց. պրիզմ-ի գագաթների թիվը որևէ կողմի չէ գծանկար գագաթների կրճատումն է

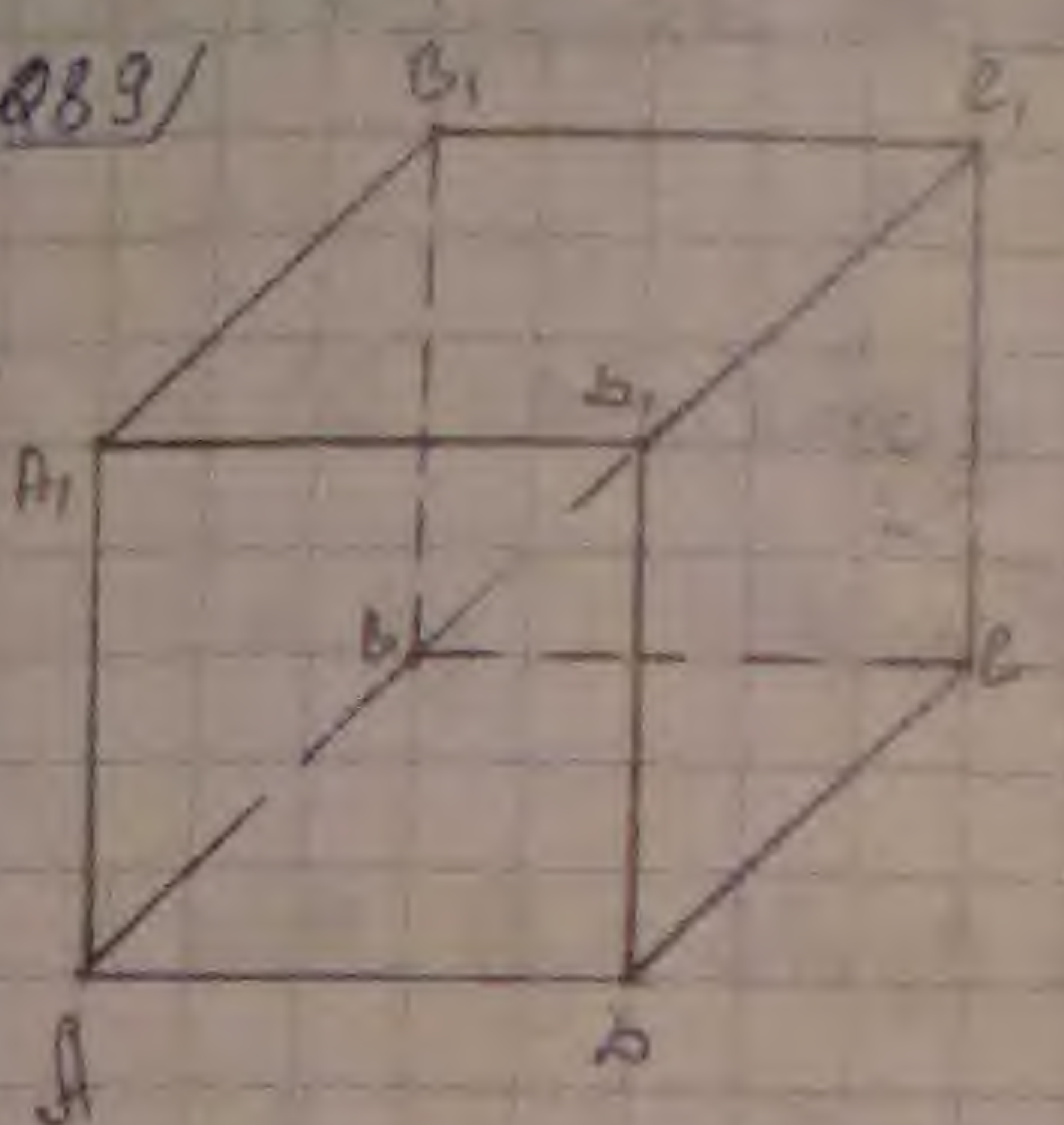
Այս հարցը յուր. պրիզմ-ի թիվը կողմի կամ գծանկար հողերի թիվը $= 5$

Տրա կողմի հողերի թիվը, եթե $= 6$

հողմայի հող երի թիվը, ապա թիվ պրիզմայի հողերի թիվ կողմի հողերի թիվ կատարյալ է, եզրակացնել յուր

Կրկնել 5-7 կետերը խնդիր լուծել պահանջվածից 3-ը: 24

289/



Տրված է

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդ

$AC_1 = d$

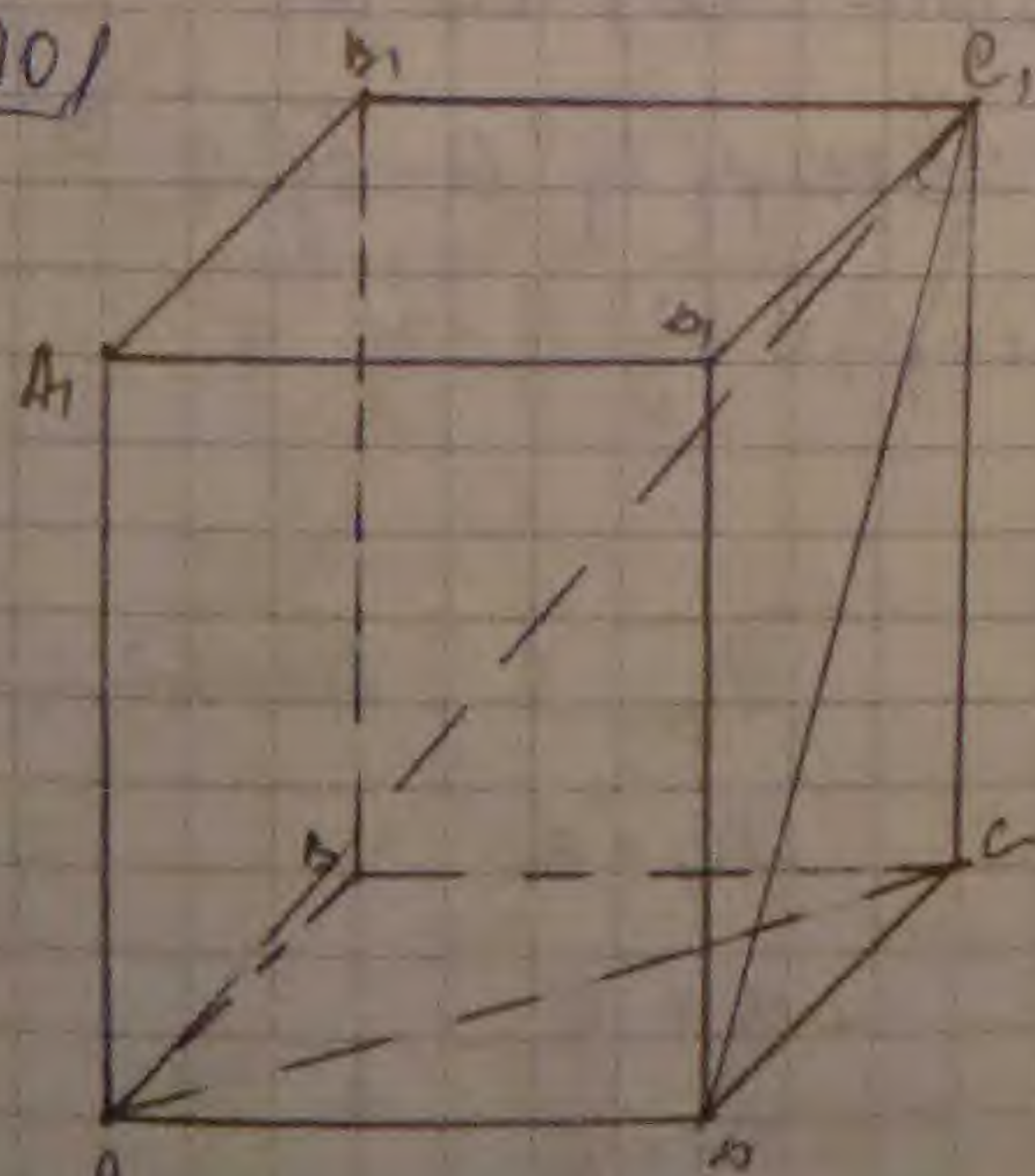
Ապաց. որ $S_{լր} = 2d^2$

Խորանարդի կողը նշ. a-ով

$$d^2 = 3a^2 \text{, որտեղից } a^2 = \frac{d}{3}^2$$

$$S_{լր} = 6a^2 = 6 \cdot \frac{d}{3}^2 = 2d^2$$

290/



Տրված է

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստ

$AC = l$

$\angle CAD = \varphi$

~~$\angle C_1$~~

$\angle\alpha = \theta$

$S_{կողմ}$ - ?

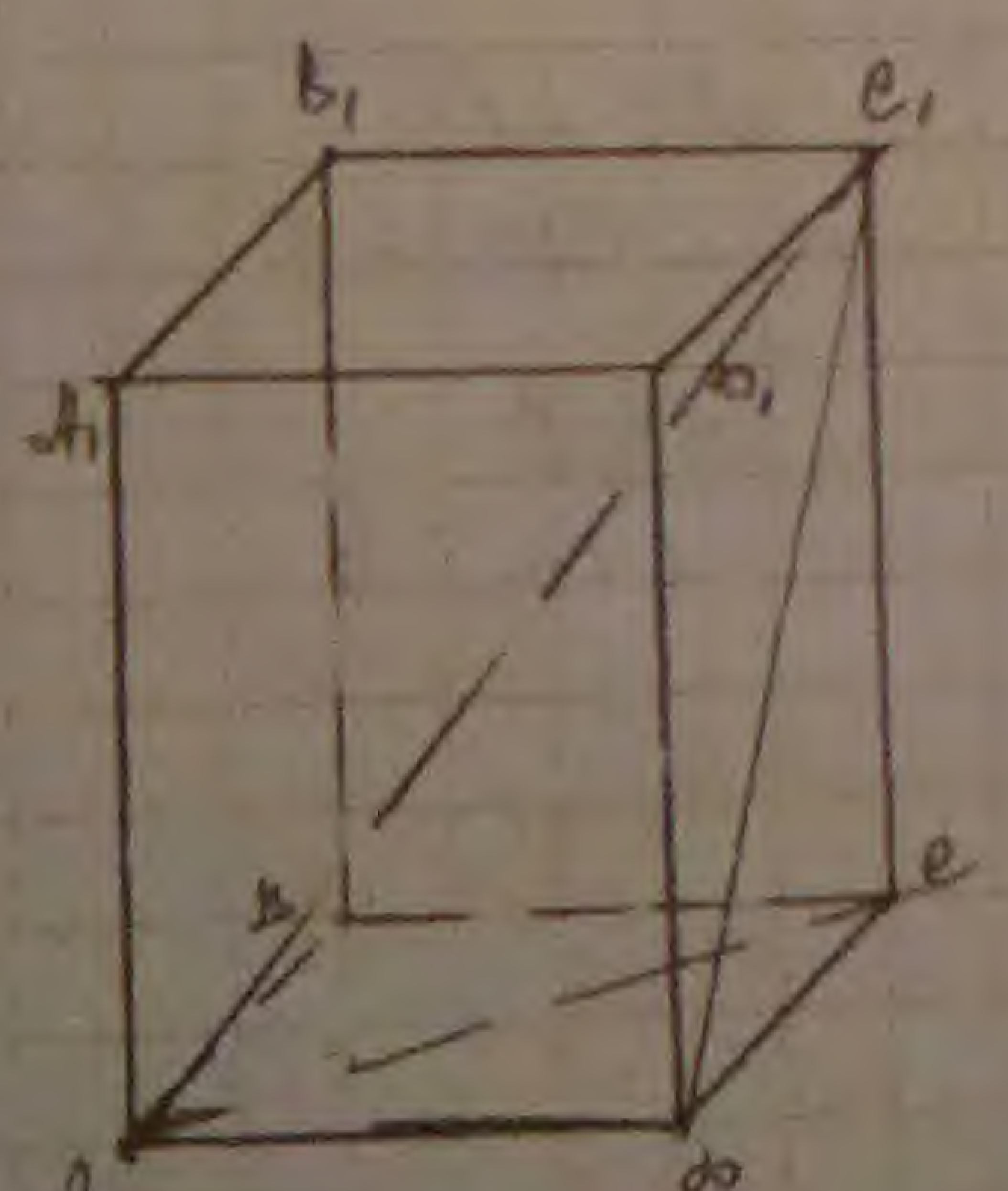
Գտնենք AC_1 թեքի պրոյեկցիան AD ուղղի վրա։ $C_1D \perp AD$
(Ե-Կ ըստ $AD \perp DC$ և $AD \perp DD_1 \Rightarrow AD \perp C_1D$) $\Rightarrow$
$= \angle C_1AD = \angle\alpha = \theta$

ΔACD ուղղ. $\angle CAD = \varphi$ և $AC = l$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow AD = l\cos\varphi$ և $CD = l\sin\varphi$

ΔAC_1D $AD = l\cos\varphi$ և $\angle C_1AD = \theta$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow C_1D = AD \cdot tg\theta = l\cos\varphi\, tg\,\theta$
ΔC_1DC ուղղ.՝ $CD = l\sin\varphi$ և $DC_1 = l\cos\varphi\, tg\,\theta \Rightarrow$
$\Rightarrow CC_1 = \sqrt{l^2\cos^2\varphi\, tg^2\theta - l^2\sin^2\varphi} =$
$= l\cos\varphi\sqrt{tg^2\theta - tg^2\varphi}$

$S_{կողմ} = P_{հ.} \cdot CC_1 = 2(AD + CD)\cdot CC_1 =$
$= 2(l\cos\varphi + l\sin\varphi)\cdot l\cos\varphi\sqrt{tg^2\theta - tg^2\varphi} =$
$= 2l^2\cos\varphi(\cos\varphi + \sin\varphi)\sqrt{tg^2\theta - tg^2\varphi}$

291)



Տր. է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղ-ներ

$AC_1 = d$

$\angle\alpha = \varphi$

$\angle\beta = \theta$

$S_{կողմ}$ - ?

Լ-ն․ որ $C_1C \perp (ABC) \Rightarrow \angle C_1AC = \angle \alpha = \varphi$

Տանենք ~~$AD \perp C_1D$~~ $\angle C_1AD = \theta$

ΔAC_1C-ից՝ $AC_1 = d$, $\angle C_1AC = \varphi$ և $CC_1 \perp AC \Rightarrow$

$\Rightarrow CC_1 = d\sin\varphi$ և $AC = d\cos\varphi$

ΔAC_1D-ից $AD = d\cos\theta$

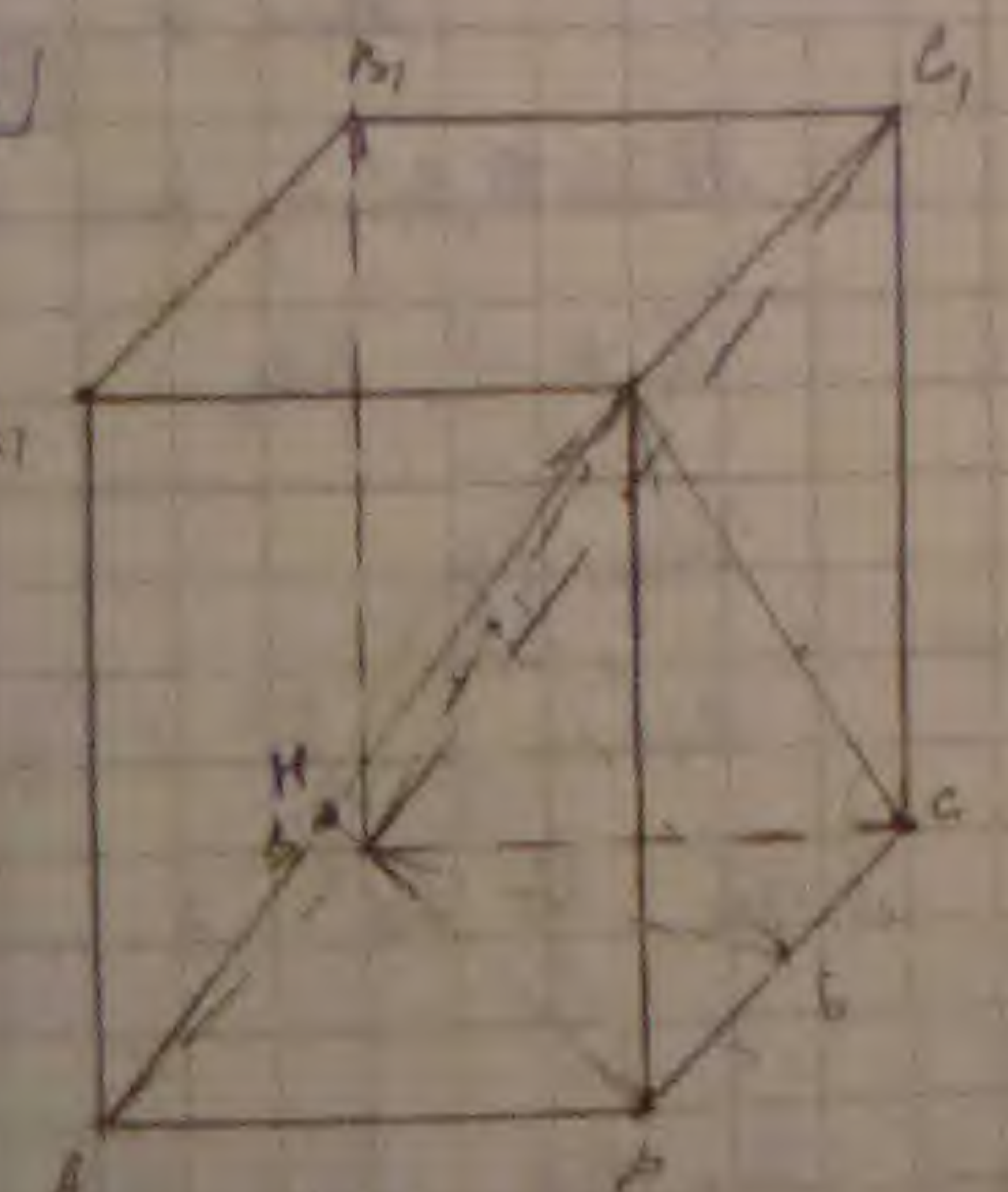
ΔACD-ից $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{d^2\cos^2\varphi - d^2\cos^2\theta} =$

$= d\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2\theta}$

$S_{կողմ} = P_հ \cdot CC_1 = 2\left(d\cos\theta + d\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2\theta}\right)\cdot d\sin\varphi =$

$= 2d^2\sin\varphi\left(\cos\theta + \sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2\theta}\right)$

292)



Տր․ է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղ. պր

$AD = 6$ սմ

$DD_1 = 8$ սմ

h - ?

DC և BB_1 խաչվող ուղիղների հեռավորություն-

ը կլինի հավասար հարթության և D_1B-ով

$DC \parallel$ հարթությանը՝ որ՝ (AD_1B)-ն

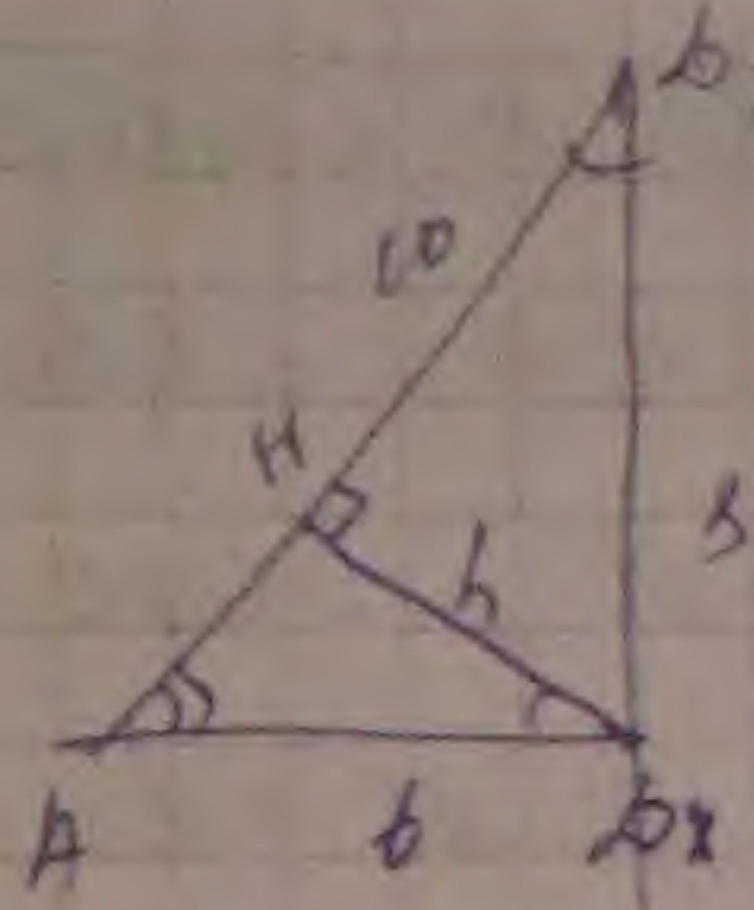
կանցի

ΔAD_1D – ուղ

$DD_1 = 8$ սմ

$AD = 6$ սմ

$DH \perp AD_1$



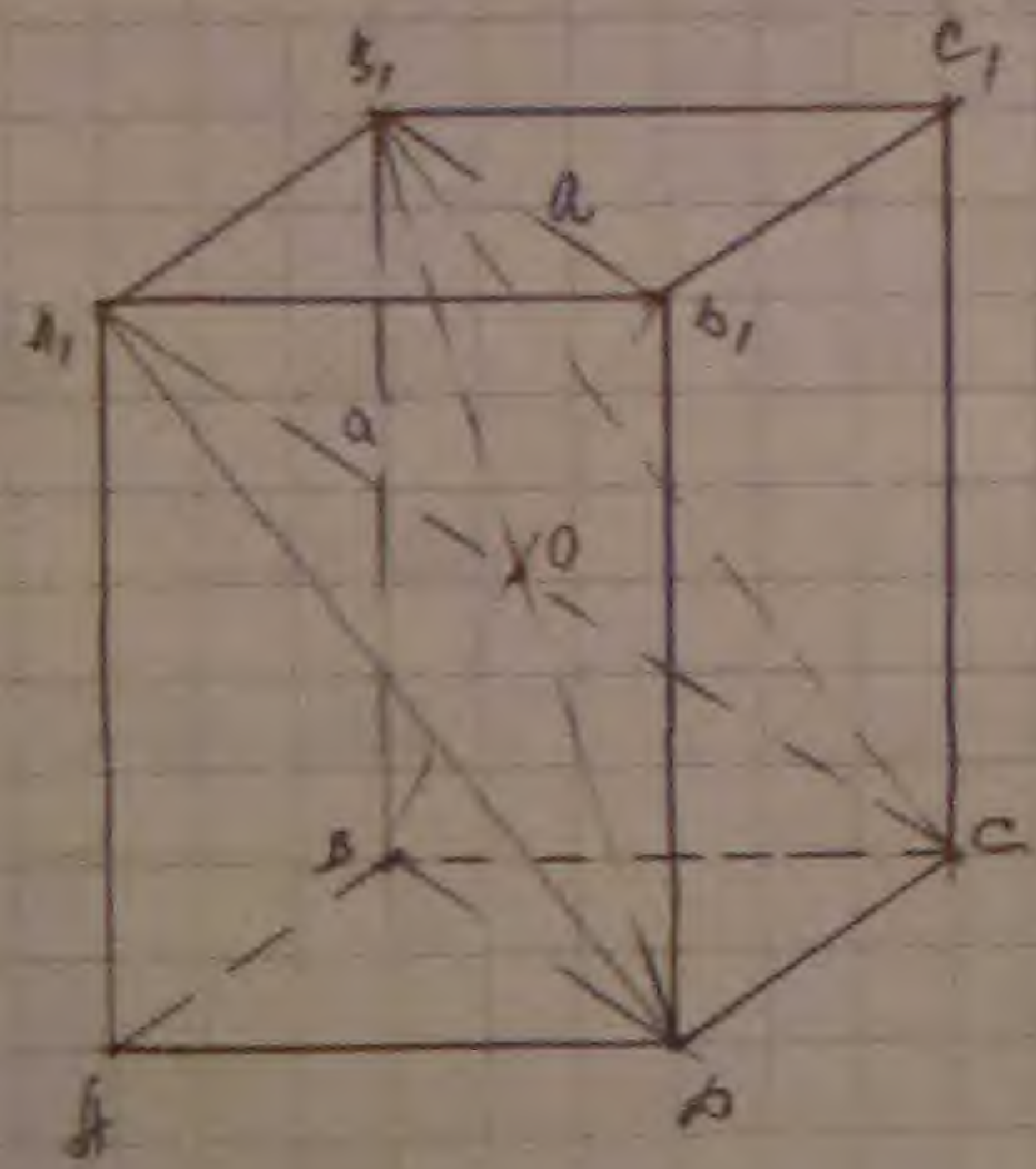
$\Delta ADD_1 \sim \Delta AHD$ (ըստ 2 անկյան) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{D_1D}{h} = \dfrac{AD}{AH} = \dfrac{AD_1}{AD} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$

~~D_1D~~ $h = \dfrac{D_1D}{5} \cdot 3 = \dfrac{8 \cdot 3}{5} = 4{,}8$ սմ

Պատ.՝ 4,8 սմ

298/



Տրվ. է

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղ. զուգ. պր.

$B_1D \perp BD_1$

Գտն. պր

B_1D-ն և AC-ն կազմ. 55 ... $60°$-ի անկյուն

Քանի որ BB_1D_1D ուղղանկյուն, և $BD_1 \perp B_1D \Rightarrow$

$\Rightarrow BB_1D_1D$-ն քառակուսի է

$B_1D_1 = B_1B = a$

$A_1B_1 = A_1D_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

ΔAA_1D – п/у

$\left.\begin{array}{l} AA_1 = a \\ AD = \frac{\sqrt{2}}{2}a \end{array}\right\} \Rightarrow A_1D = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{1,5}$

~~AD~~ =

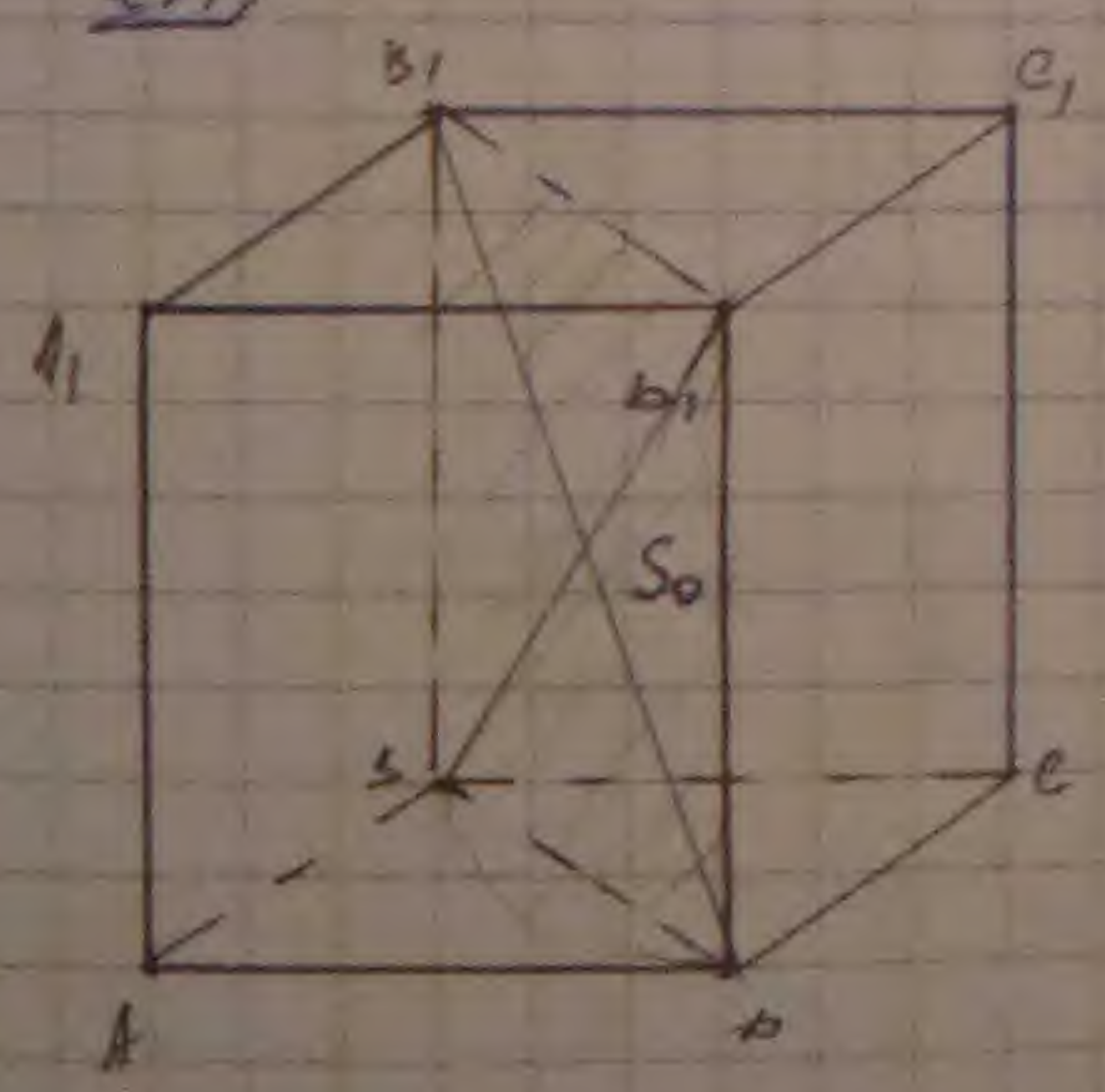
$tg\,\varphi = \frac{A_1D}{DC} = \frac{a\sqrt{1,5}}{a}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{3}$

$\varphi = 60^\circ$,

ΔDOC – п/у; $DO = OC \Rightarrow \angle ODC = \angle OCD = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DOC = 60^\circ$

294)



Пр. 5 бок. диаг. пр/у S–

$S_0 = S_{BB_1D_1D}$

$AB = AD = a$

$S_{пов}$ – ?

$S_0 = \frac{x\cdot a\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{2S_0}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}S_0}{a}$

ΔABD – п/у $\quad BD = a\sqrt{2}$

ΔBDD_1 – п/у; $S_0 = \frac{BD\cdot DD_1}{2} \Rightarrow DD_1 = \frac{2S_0}{BD} = \frac{2S_0}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}S_0}{2a}$

$S_б = P_о\cdot DD_1 = 2\cdot 2a\cdot\frac{\sqrt{2}S_0}{2a} = 2\sqrt{2}S_0.$

A) $AD = x$

$ax = S_0$

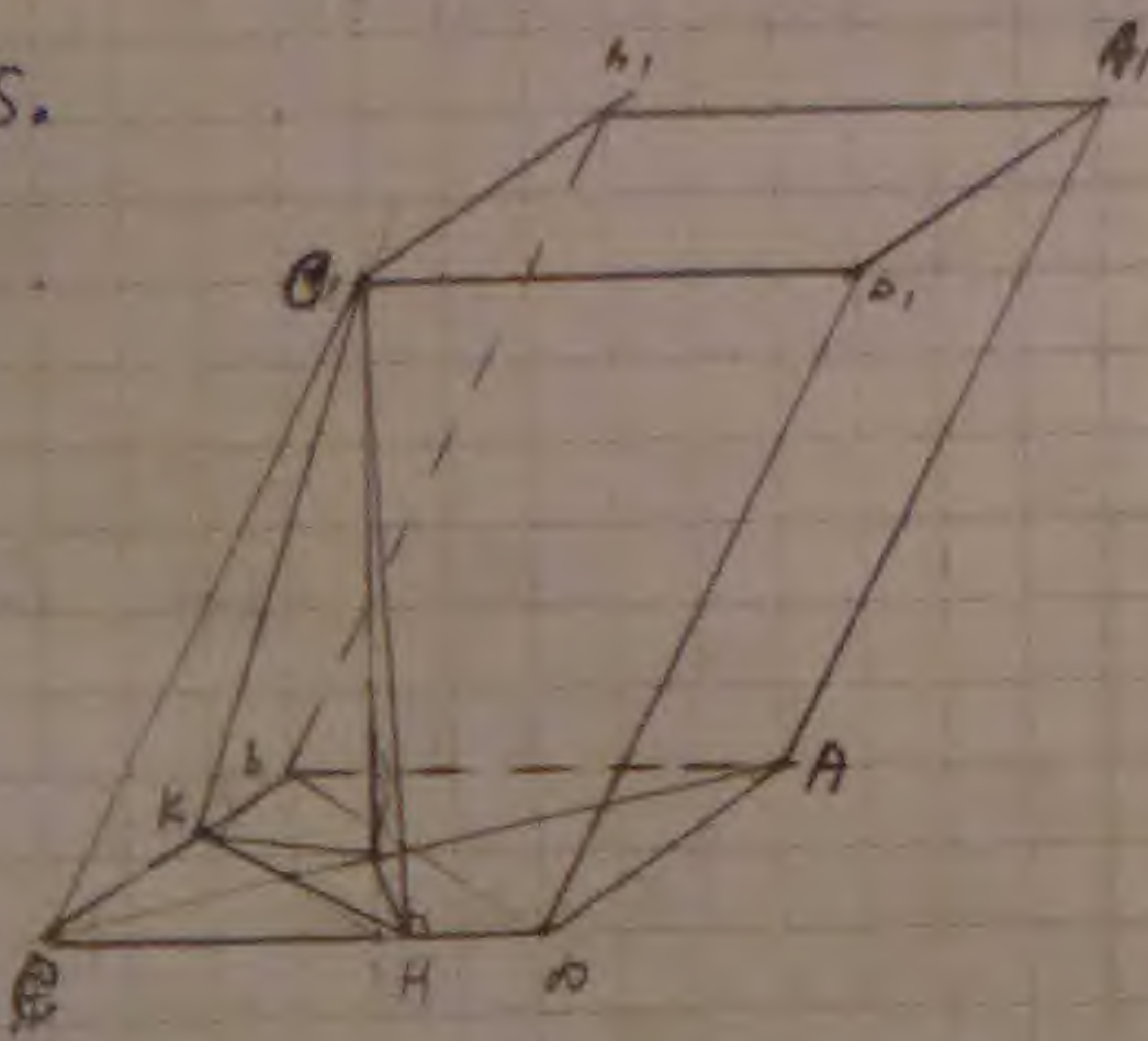
$x = \frac{S_0}{a}$

$AA_1 = y = \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{S_0^2 - a^4}{a^2}} = \frac{\sqrt{S_0^2 - a^4}}{a}$

$S_կ = P_հ \cdot AA_1 = 4a \cdot \frac{\sqrt{S_0^2 - a^4}}{a} = 4\sqrt{S_0^2 - a^4}$

Պատ.: $2\sqrt{2}\,S_0$ կամ $4\sqrt{S_0^2 - a^4}$:

295.



21.

$$\left.\begin{array}{l} BB_1 \perp \alpha \\ OO_1 \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BB_1D \sim \Delta OO_1D$$

$$\frac{OO_1}{BB_1} = \frac{DO_1}{DB_1} = \frac{DO}{DB}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{OB}{OD} + 1$$

$$\frac{OB}{OD} = \frac{3}{7}$$

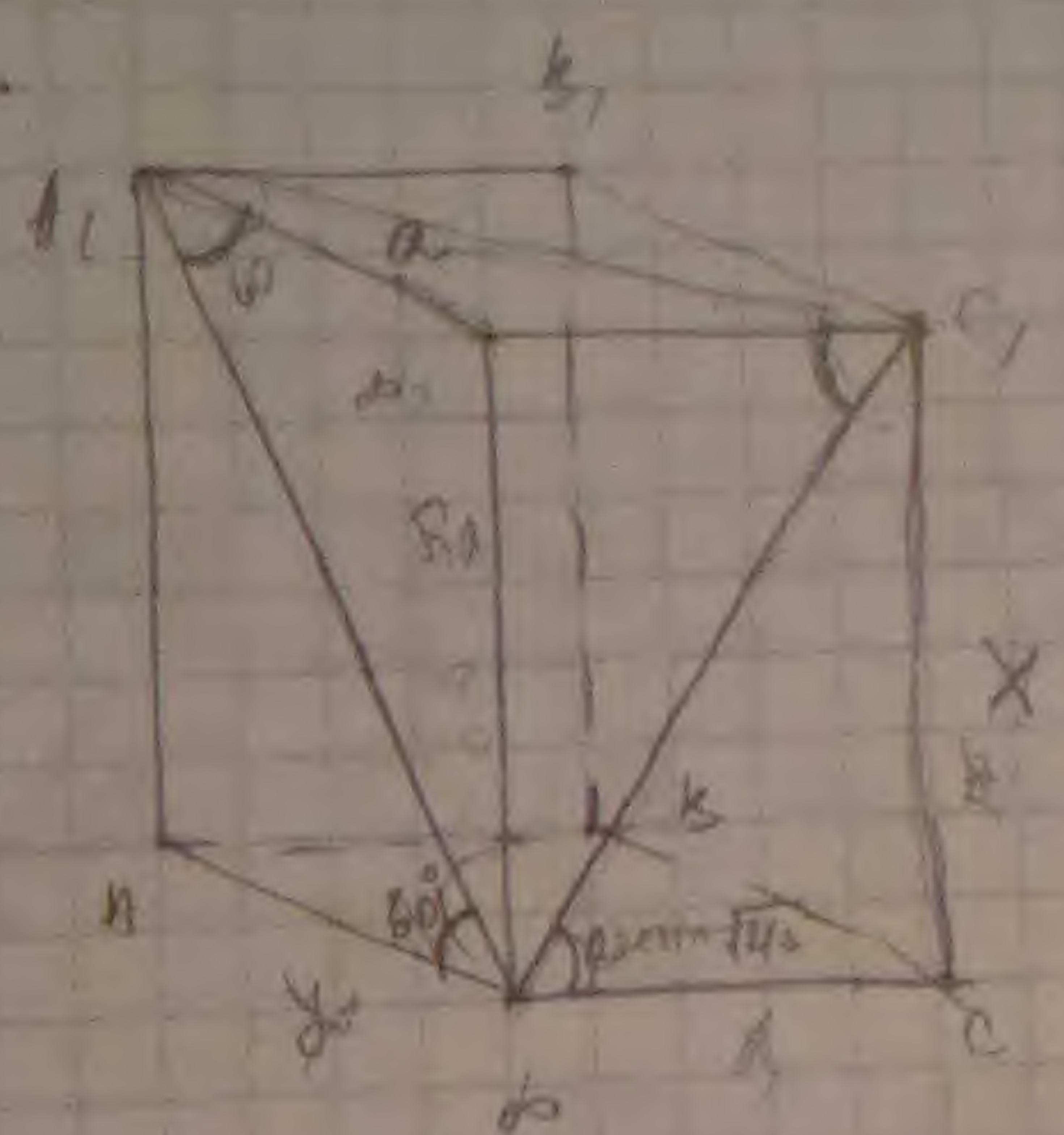
$$\frac{12}{x} = \frac{3}{7} + 1$$

$$\frac{12}{x} = \frac{10}{7}$$

$$10x = 7 \cdot 12$$

$$x = \frac{7 \cdot 12}{10} = \frac{7 \cdot 6}{5} = 8{,}4$$

33.



$$BC_1 = \frac{x}{\arcsin\sqrt{2/3}}$$

$$BH_1 =$$

$$BC_1 = \frac{x}{\sin\arcsin\sqrt{2/3}}$$

$$BA_1 = \frac{\cancel{BA_1}}{\sin 60°}$$

$$\cancel{B_1C_1 =}$$

$$AC = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sqrt{3}\,a$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin a) = \frac{\cos(\arcsin a)}{\sin(\arcsin a)} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} =$$

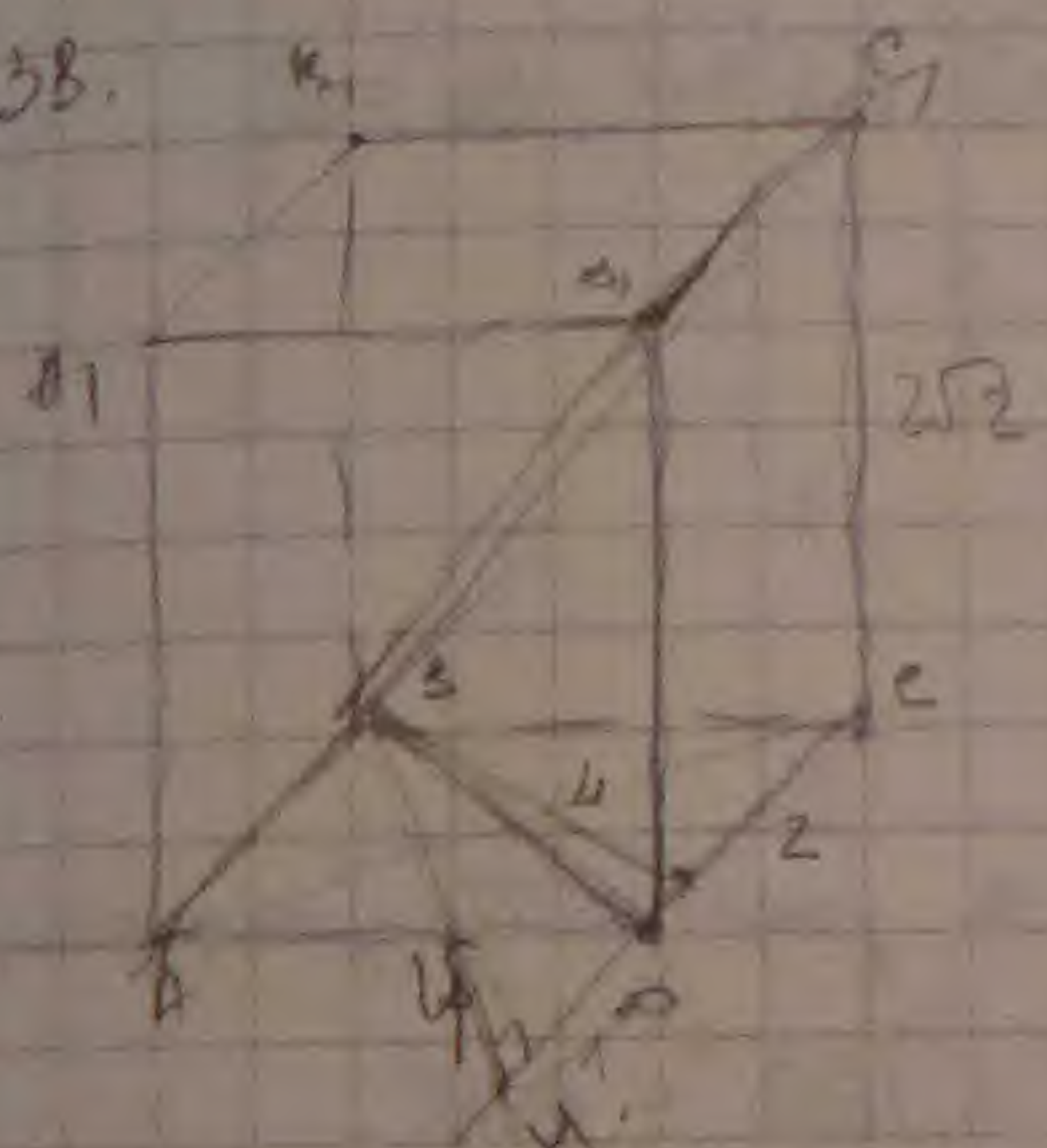
$$= \frac{\sqrt{1-\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{B_1C = \sqrt{\frac{3}{2}}\,a}$

$A_1C_1 = \sqrt{a^2 + \frac{3}{2}a^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}\,a$

$\alpha =$

38.



$\triangle BHC$ п/у $HC = \cancel{2\sqrt{5}}\ \sqrt{25-16} = 3$

$BD = 2\sqrt{17}$

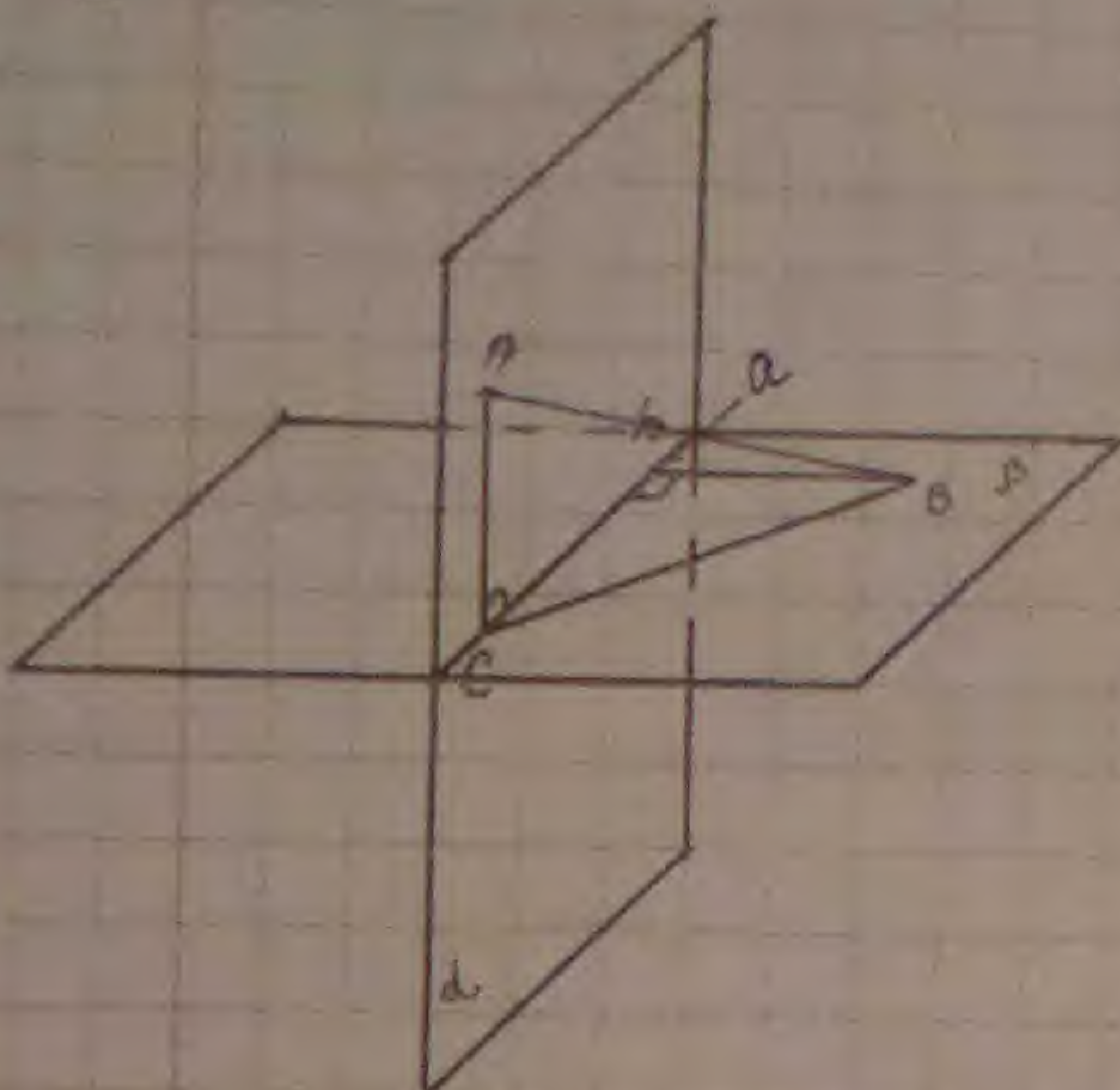
$BB_1 = \cancel{2\sqrt{10}\quad 17\cdot\sqrt{2} = 17\sqrt{2}}$

$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$

$AC^2 = 8 + 50 - 5 = 53$

Տնային 14ա

1.



$\alpha \perp \beta$

$A \in \alpha,\ B \in \beta$

$AC \perp a,\ BD \perp a$

$a \in \alpha$ և $a \in \beta$

$AC = 3;\ BD = 4,\ CD = 12$

$AB - ?$

CDB ուղ. եռ. $BD \perp CD,\ BD = 4,\ CD = 12 \Rightarrow$ ըստ Պյութագորասի

թ-ի $BC^2 = CD^2 + BD^2 \Rightarrow BC = \sqrt{144+16} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

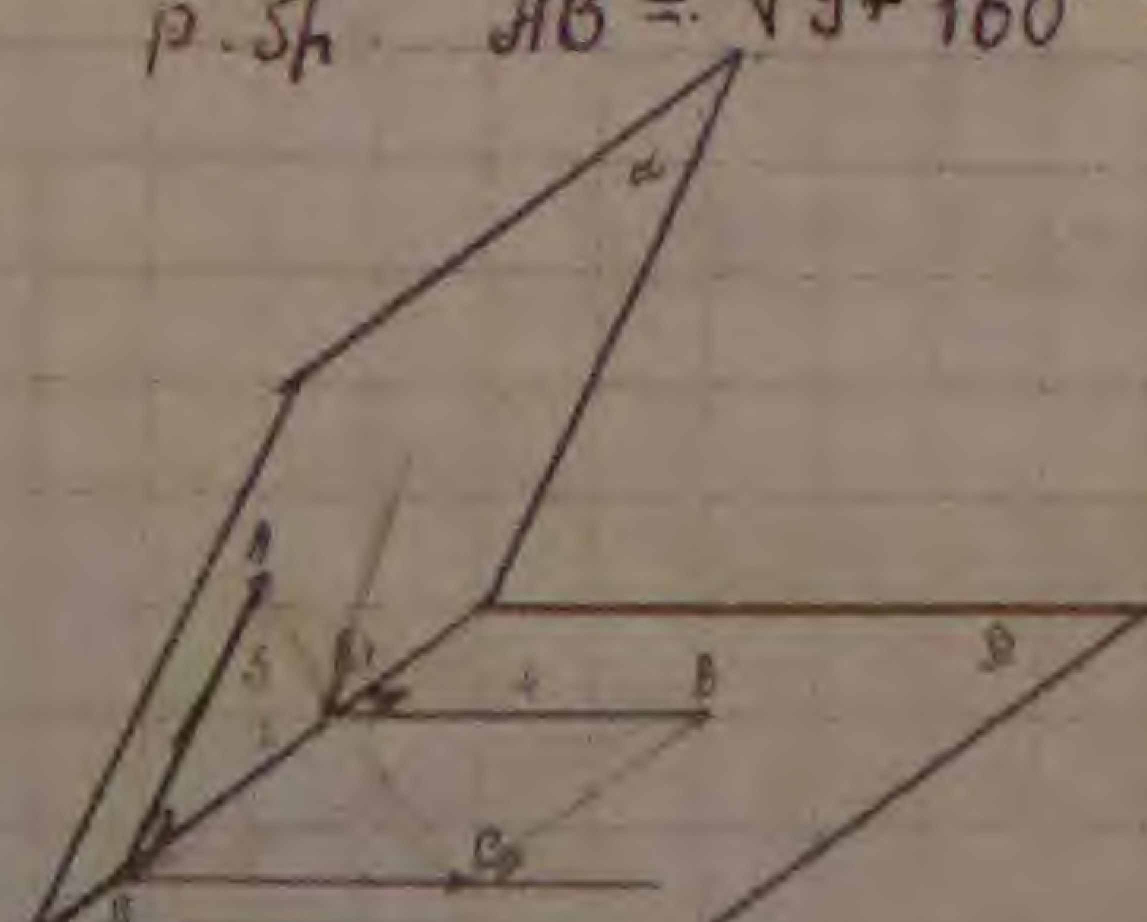
Ըստ հայտնի $\alpha \perp \beta;\ A \in \alpha;\ AC \perp a \Rightarrow AC \perp \beta$:

ACB ուղ. եռ. $AC \perp \beta \Rightarrow AC \perp CB,\ AC = 3;\ CB = 4\sqrt{10} \Rightarrow$ ըստ

Պյութ. թ-ի $AB = \sqrt{9+160} = \sqrt{169} = 13$

Պատ՝ $AB = 13$

2.



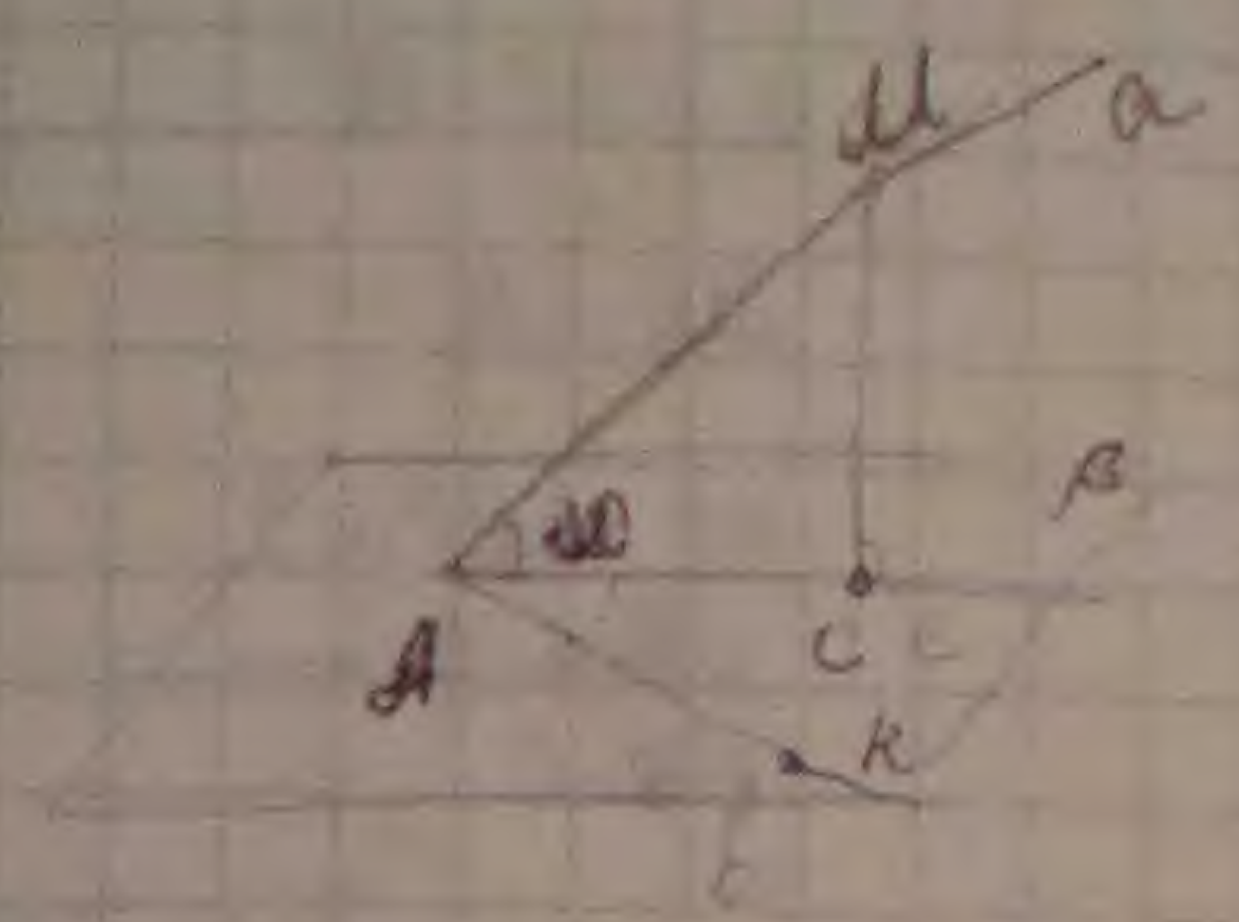
Պրակ 5

AA_1B_1B քառանկյուն

$AA_1 = 3;\ BB_1 = 4,\ A_1B_1 = 6\ AB = ?$

$AA_1 \perp A_1B_1$ և $BB_1 \perp A_1B_1$.

№ 3.



$\angle MAC = 30°$

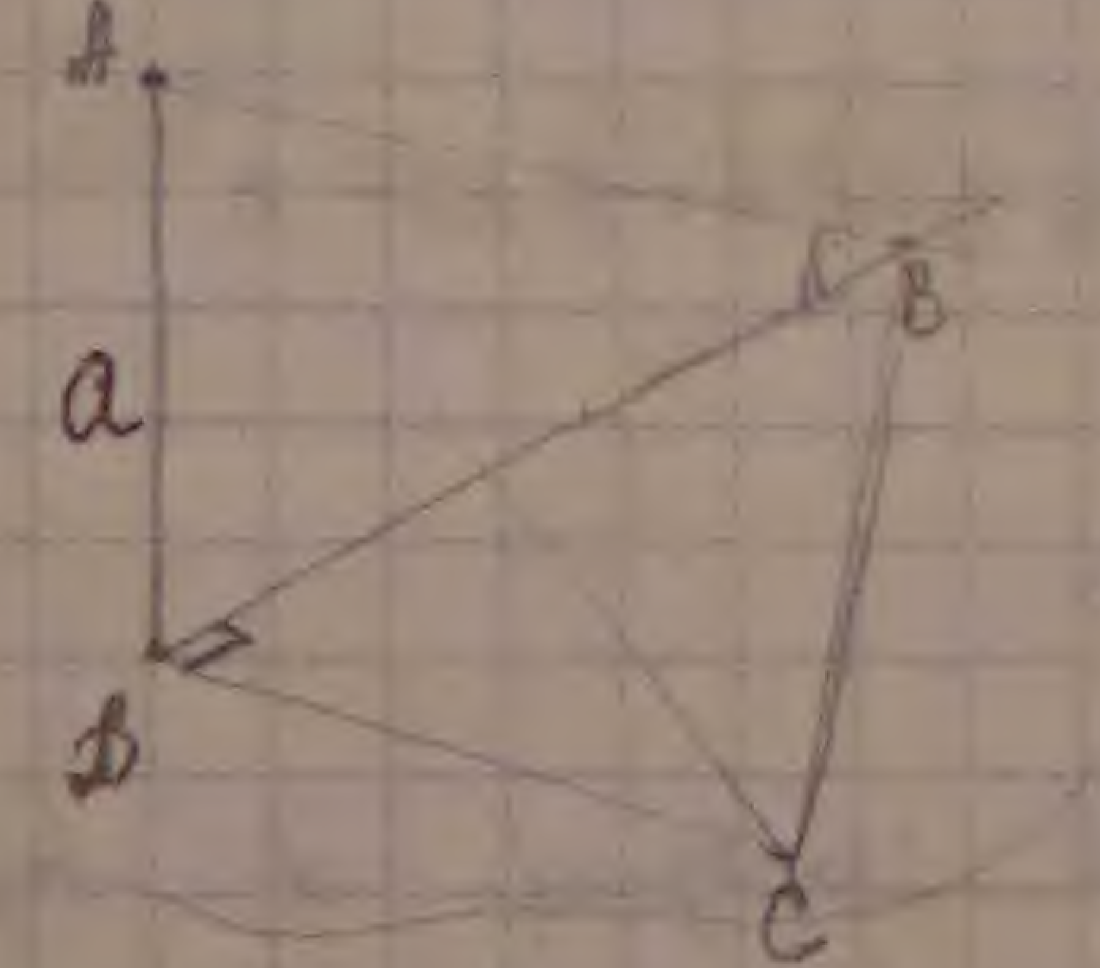
$b \in \beta$

$c \in \beta$

$\angle CAK = \arccos\sqrt{2/3}$

MAK – ?

4.



$\angle ABD = 30°$

$\angle ACD = 45°$

$BC = 8$

$\angle BDC = 90°$

AB и AC – ?

AD – г. н. a – п/: $DB = \frac{a}{tg 30°} = \sqrt{3}a$

$DC = \frac{a}{tg 45°} = \sqrt{2}a$

ΔDBC – п/у $\quad 64 = 5a^2$

$a = \frac{8\sqrt{5}}{5} \Rightarrow AB = \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot 2 = \frac{16\sqrt{5}}{5}$

$AC = \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2} = \frac{8\sqrt{10}}{5}$

Ответ: $AB = \frac{16\sqrt{5}}{5}$; $AC = \frac{8\sqrt{10}}{5}$

$M \notin \alpha$

$\angle EAF = 90^\circ$

$MA = 12$

$ME = MF = 9$

$\underline{MK \perp \alpha}$

$MK - ?$

$$\left.\begin{array}{l} MF \perp h \\ ME \perp k \\ ME = MF = 9 \\ MA\text{-ն ընդհ. է} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MEA = \Delta MAF \Rightarrow$$

$\Rightarrow AE = AF$: E և F կետերով α հարթության մեջ

h և k ուղիղներին ուղղահայաց ուղիղներ տանենք, որոնք կհատվեն մի կետում՝

O կետում: AEO և AFO ուղ. եռ-ներ, որտեղ $AE = AF$, AO-ն

ընդհ. է $\Rightarrow \Delta AEO = \Delta AOF$ (ըստ էջի և ներքնաձիգի) $\Rightarrow$

$\Rightarrow EO = OF \Rightarrow$ O կետը գտնվում է $\angle A$-ի կիսորդի վրա

Ըստ երեք ուղղահայացների MK $\perp \alpha$, MK-ն ընդհ. է և $ME = MF \Rightarrow$

$\Rightarrow EK = FK$

2 96/

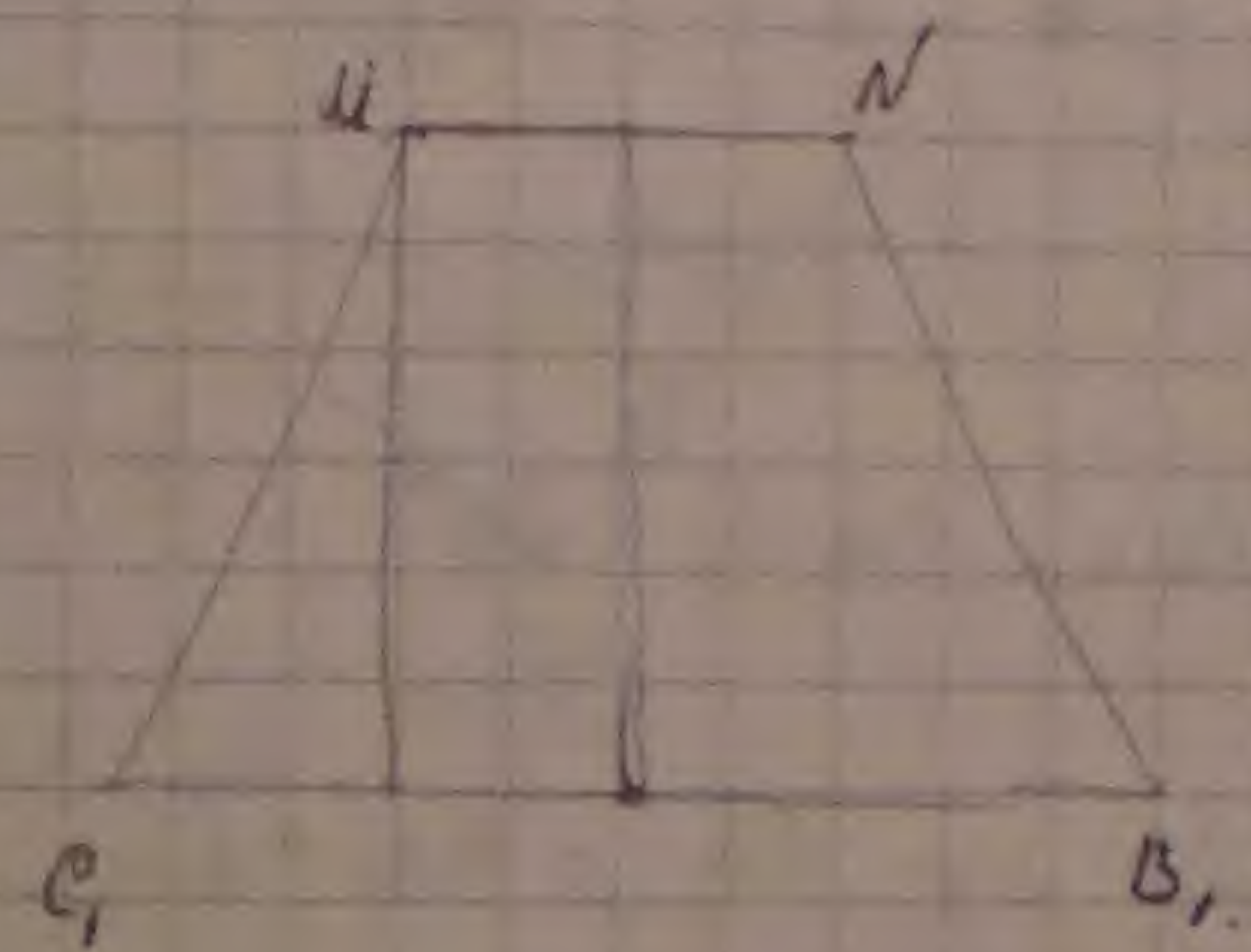
$ABCA_1B_1C_1$

$AA_1 = h$

$C_1MNB = \varphi$

$EE_1 \perp MN$; $AK \perp BC$; $MN \parallel BC$ $\} \Rightarrow AK \perp MN \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle E_1EK = \varphi$



S_h

$$S_h = \frac{MN + B_1C_1}{2} \cdot EE_1$$

$EE_1 = \frac{h}{\sin\varphi}$ $\quad EK = \frac{h}{tg\,\varphi}$

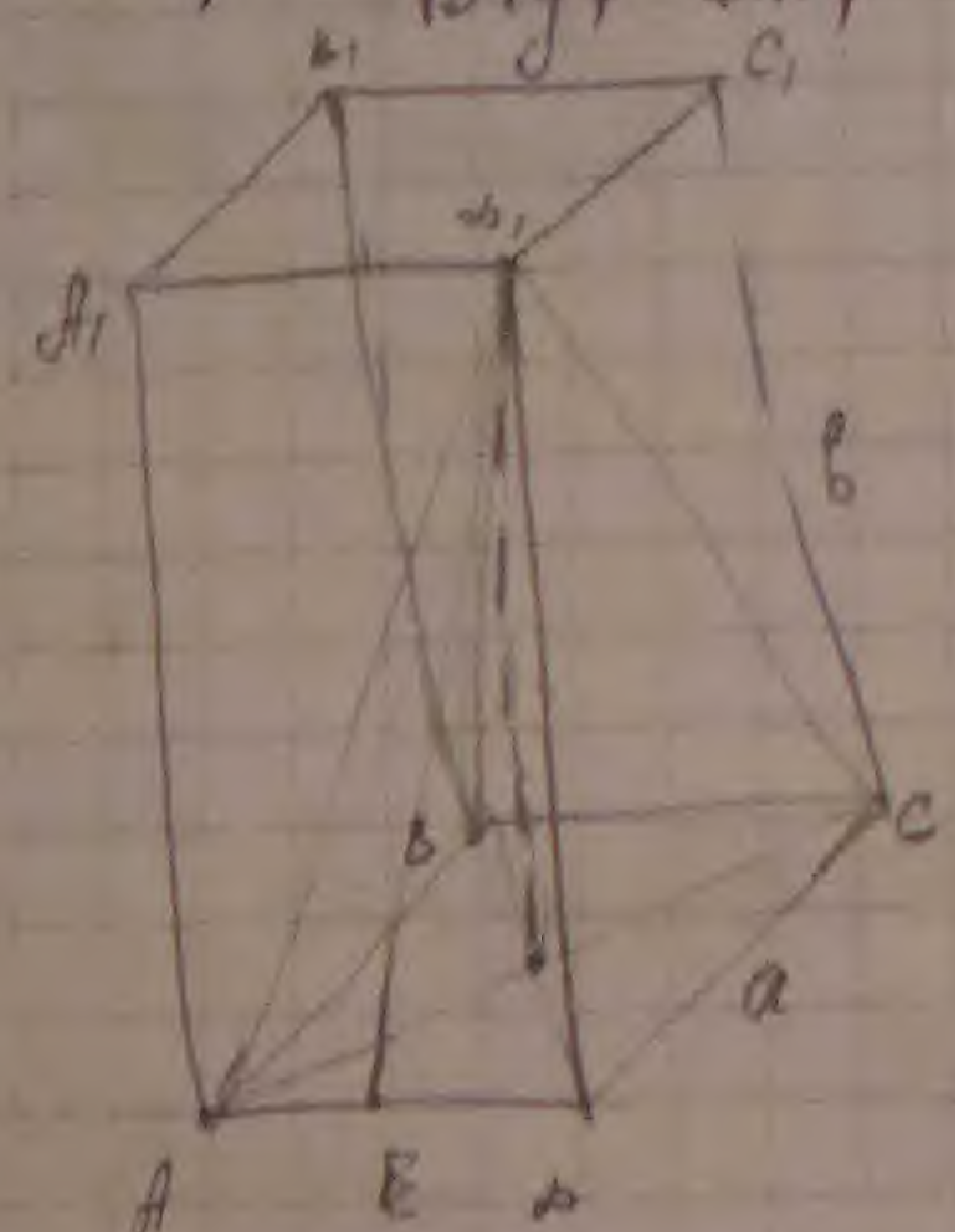
$AK = \frac{2h}{tg\,\varphi}$

$AB = \frac{AK}{\sin 60^\circ} = \frac{2h \cdot 2}{tg\,\varphi \cdot \sqrt{3}}$

$S_{тр} = \frac{AB + \frac{AB}{2}}{2} \cdot EE_1 =$

$= \frac{3}{4} \cdot \frac{4h}{\sqrt{3}\,tg\varphi} \cdot \frac{h}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{3}\,h^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ | Ответ.

296



ABCD – квадрат

$DD_1 = D_1C = D_1B = D_1A$

$AB = a$

$AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = b$

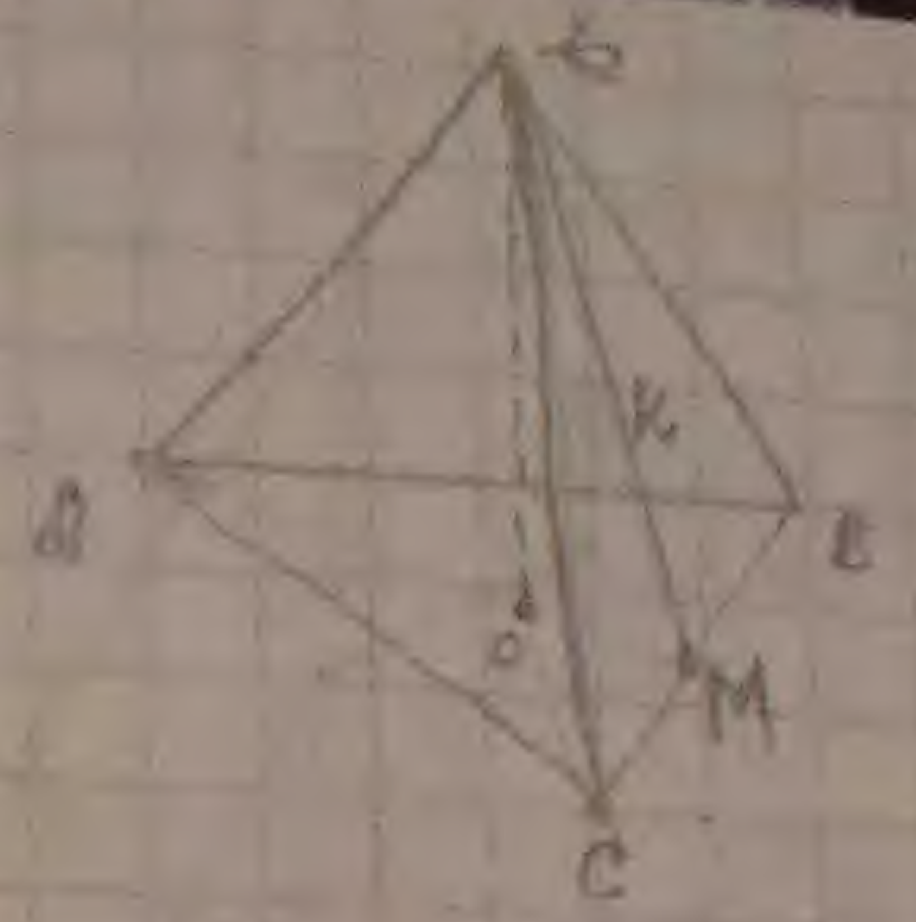
$S_{п} - ?$

$S_{п} = 4 \cdot S_{AA_1D_1D} + 2S_{осн} = \cancel{2a^2}$

$D_1E \perp AD$ т.к. $AD_1 = DD_1 = b$.

$D_1E = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$

$S_{п} = \cancel{4}2a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} + 2a^2 = 2a\sqrt{\cancel{4}b^2 - a^2} + 2a^2$



$\triangle ABC$ ...

$AB = m$

$S_{бок} = 2 S_h$

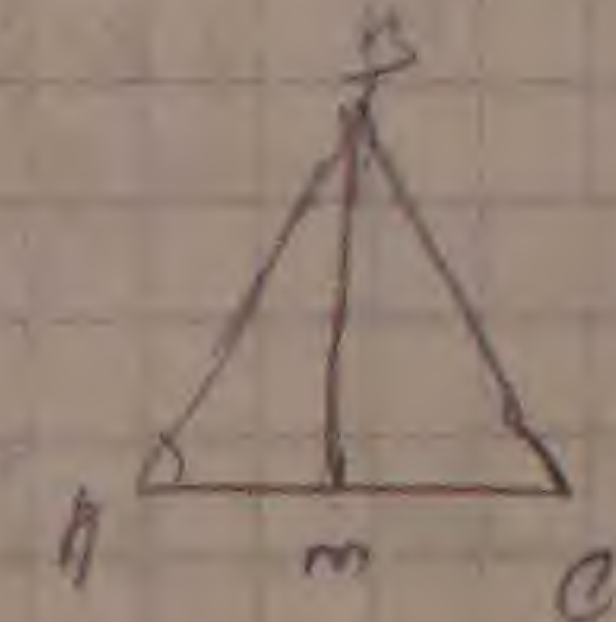
$bk - ?$

$$S_{бок} = \frac{3k \cdot m}{2}$$

$$S_h = \frac{1}{2} \cdot \frac{m\sqrt{3}}{2} \cdot m = \frac{m^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{3km}{2} = \frac{m^2\sqrt{3}}{2}$$

$$k = \frac{m\sqrt{3}}{3}$$



$$OM = \frac{AM}{3} = \frac{m\sqrt{3}}{2}$$

$$OM = \frac{m\sqrt{3}}{6}$$

$\triangle bOM$ — п/у

$$bO = \sqrt{bM^2 - OM^2} = \sqrt{\frac{3m^2}{3} - \frac{3m^2}{36}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m^2}{3} - \frac{m^2}{12}} = \sqrt{\frac{3m^2}{12}} = \frac{m}{2}$$

300

$AB = BC = AC = a$

$DA = DB = DC = b$

$S_{сеч} - ?$

$PF \parallel DB$

$EK \parallel DB$

$\left.\begin{array}{l} PK \parallel AC \\ EF \parallel AC \\ PK = EF = \frac{AC}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$AC \perp BD$ [illegible]

[illegible]

$AC \perp DB$

$FE \parallel AC$ и $EK \parallel DB \Rightarrow EF \perp KE$

$S_{h} = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{4}$

№101

[illegible] ABC [illegible]

$(\widehat{ABC}) = 120^\circ$

$BE \perp AD$

$BE = 16$ [illegible]

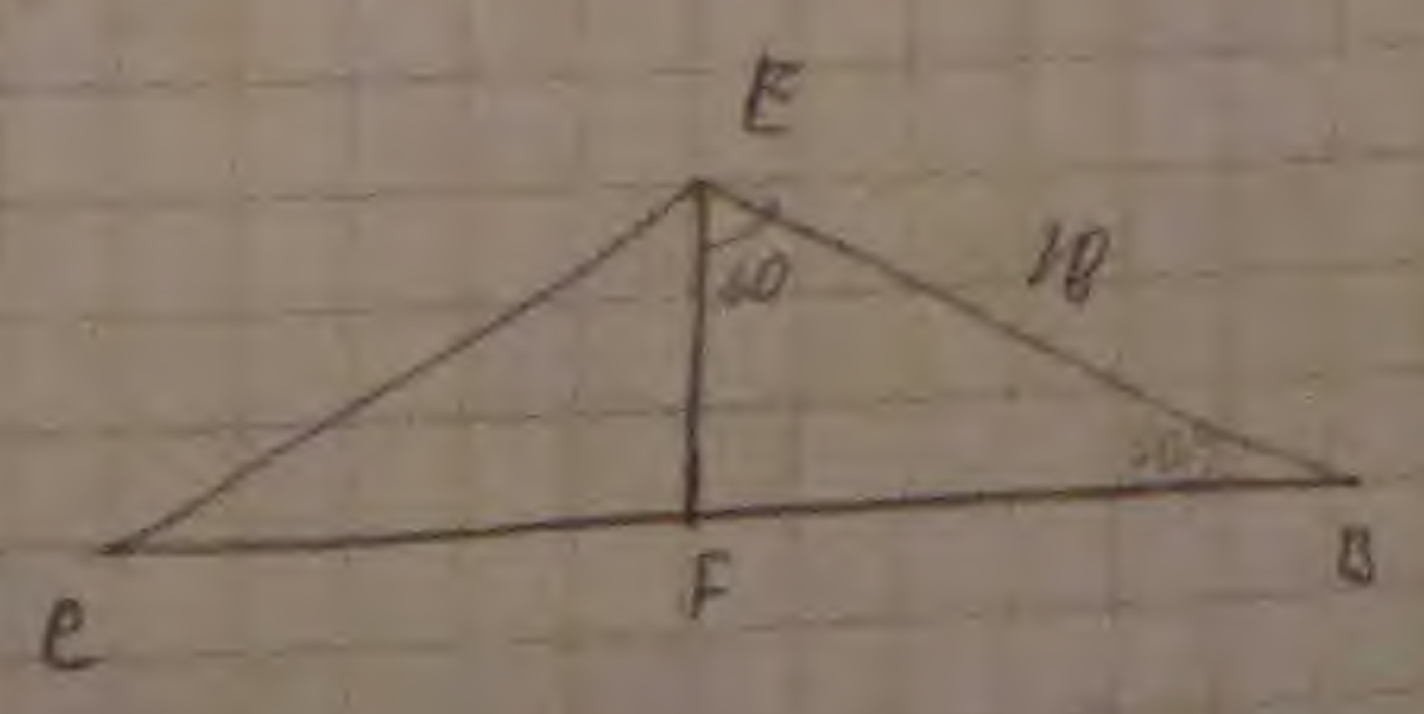
$$a^2 = 2\cdot 16^2 - 2\cdot 16^2 \cdot \cos 120^\circ = 2\cdot 16^2\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3\cdot 16^2$$

$$a = 16\sqrt{3}$$

$CE \perp AD$ [illegible] $\Delta BEC = \Delta$ [illegible]

[illegible]

$\left.\begin{array}{l} CE \perp AD \\ BE \perp AD \end{array}\right\} \Rightarrow \angle CEB = 120^\circ$



EF

$$\sin\varphi = \frac{16}{16\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$tg\,\varphi = \frac{h}{\frac{a}{2}}$$

$h = tg\,\varphi \cdot 8\sqrt{3}$

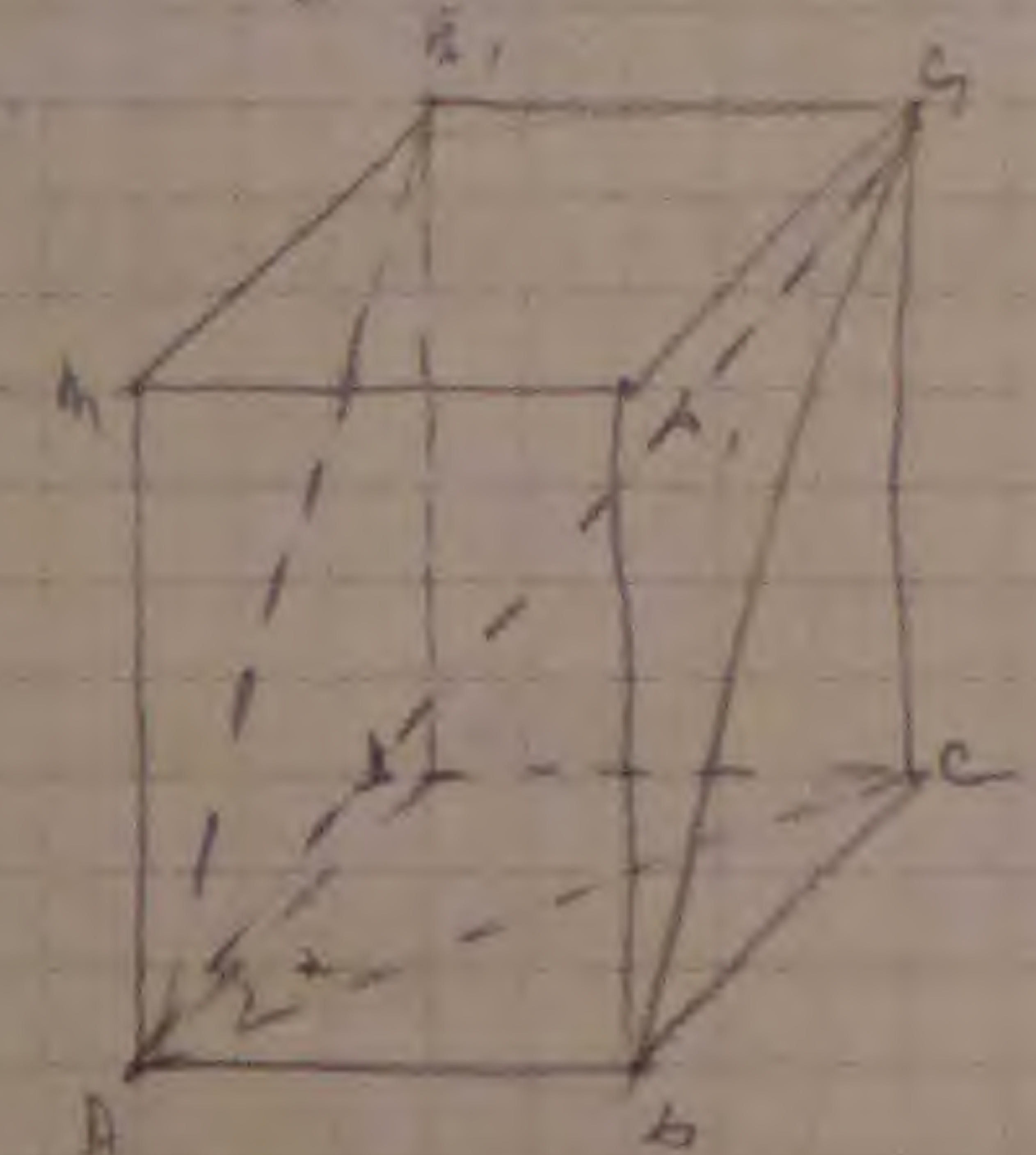
$tg\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$

$\cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$tg\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 8\sqrt{3} = 4\sqrt{6}$

224.



$\alpha = 60^\circ$

$AC = 4\sqrt{7}$

$S_b - ?$

$CC_1 \perp (ABD)$

$AC = 4\sqrt{7},\ \angle C_1AC = 60^\circ \} \Rightarrow AC_1 = \frac{AC}{\cos 60^\circ} = 4\sqrt{2} \cdot 2 = 8\sqrt{2}$

$AD = CD = 4$

$C_1D = \sqrt{64 \cdot 2 - 16} = \sqrt{128 - 16} = \sqrt{112}$

$S = 4 \cdot \sqrt{112} = 16\sqrt{7}$

26., 28, 30, 31, 35.

226.

$DD_1 = 4$ см

$AC = 2$ см

$BK = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = BK$

$OB = 2\sqrt{2}$ и $\triangle BKD$ ...

$\Rightarrow OK = \sqrt{8-2} = \sqrt{6}$

$S = \frac{1}{2} 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{3}$ ... $S = 2\sqrt{3}$ (см^2)

228.

$AC = AB = 13$ см

$BC = 10$ см

$\angle A_1AM = 45^\circ$

$BC = 13$

AA_1 $\left.\begin{matrix} CM = 5 \\ AC = 13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow AK = 12$

$AM = 8$, $\angle A_1AB = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AA_1 = \frac{AM}{\cos 45^\circ} = 8\sqrt{2}$

$AR = 6,5$

$\cos\beta = \frac{13}{2 \cdot 8\sqrt{2}} = \frac{13}{32}\sqrt{2}$

$S = BC \cdot CC_1 \cdot \sin\beta =$

$= 10 \cdot 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{338}{1024}} =$

$= 10 \cdot 8\sqrt{2} \cdot \frac{26}{13} \cdot ... = 160\sqrt{...}$

$BC \perp AM \Rightarrow$

$BC \perp AA_1 \Rightarrow BC \perp CC_1$ ...

230.

$BC = \sqrt{9+25+2\cdot3\cdot5\cdot\frac{1}{2}}$

$= 7$

$35 : 7 = 5$

$S_{AA_1C_1A} = 15,\ S_{AA_1B_1C_1} = 25$

$S_б = 75\ (см^2)$

231.

Дано: призма

$AB = 8$ см

$AD = 15$ см

$\angle BAD = 60°$

$S_{BB_1D_1D} = 130\ (см^2)$

$S_п - ?$

$BD = \sqrt{64+125-2\cdot8\cdot15\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{64+125-120} = \sqrt{69}$

$BB_1 = \frac{130}{\sqrt{69}}$

$S = S_1 + 2S_2 = 2\left(\frac{130}{\sqrt{69}}\cdot8 + \frac{130}{\sqrt{69}}\cdot15\right) + 2\cdot8\cdot15\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{2\cdot130}{\sqrt{69}}\cdot23 + 120 =$

35.

Пр. $ABCA_1B_1C_1$ ...

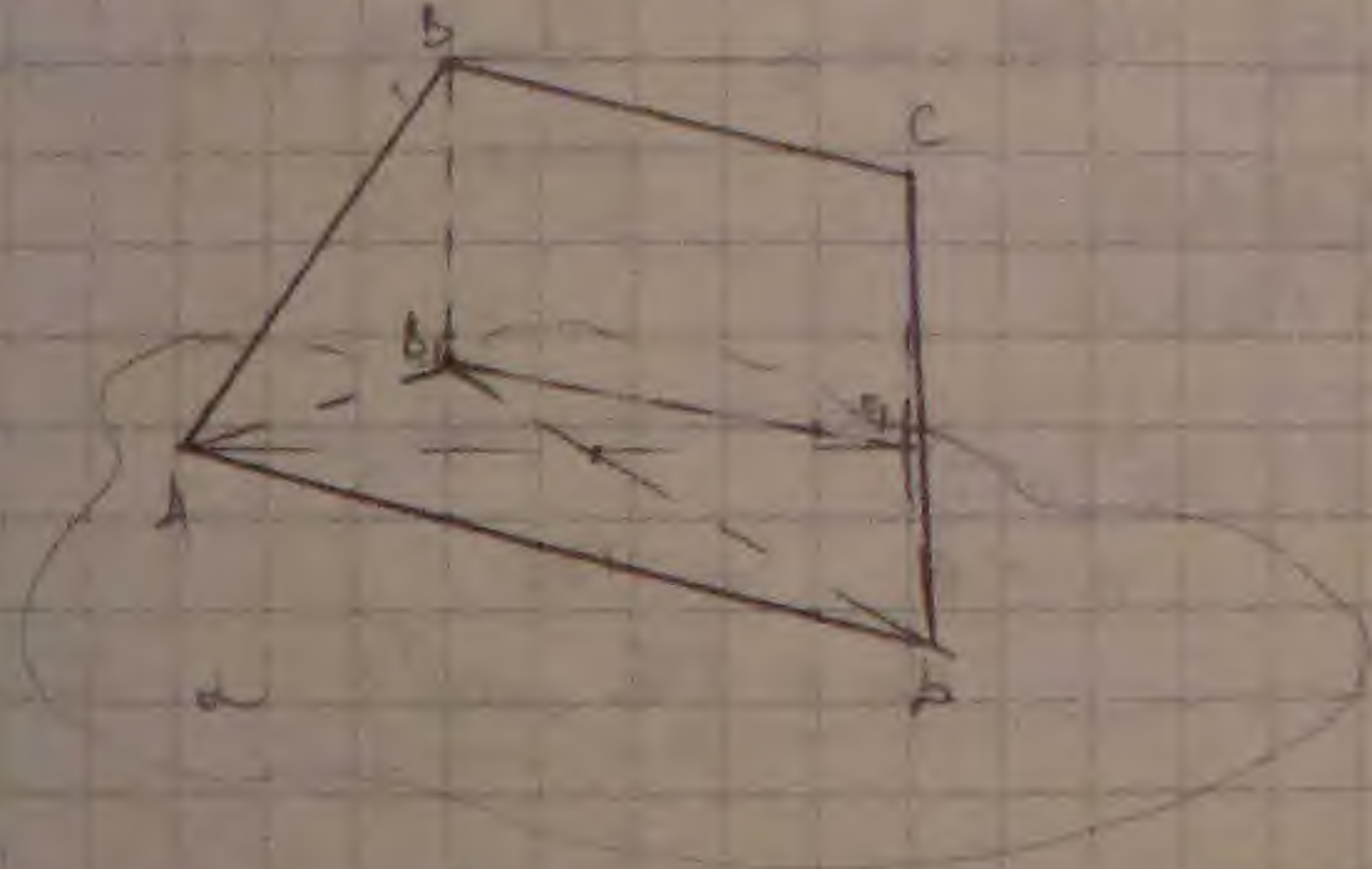
$\angle ABC = 90^\circ$

$\angle BAC = \varphi$

$\angle ACA_1 = \beta$

$\frac{S_б}{S_n}$ - ?

21.



$BC \parallel AD$

$\alpha \supset AD$

$BB_1 = CC_1 = 12$,

$AD : BC = 7 : 3$

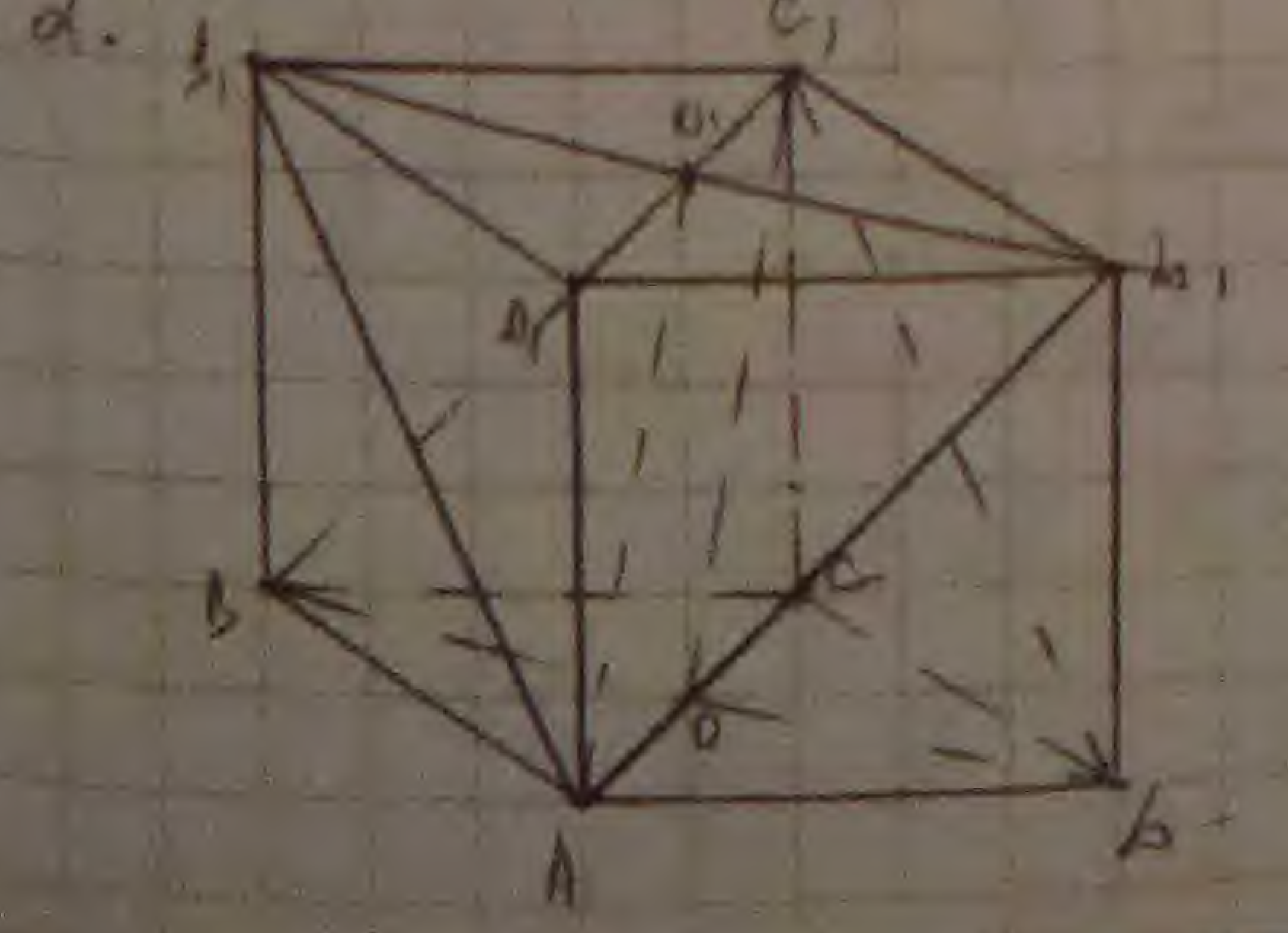
$OO_1 \perp \alpha$, $AC \cap BD = O$

OO_1 - ?

$\left.\begin{matrix} OO_1 \perp \alpha \\ BB_1 \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow OO_1 = BB_1 \Rightarrow \Delta OO_1D \sim \Delta BB_1D \Rightarrow \frac{OO_1}{BB_1} = \frac{O_1D}{B_1D} \leftarrow \frac{OO_1}{12} = 8{,}4$

$\Delta AO_1D \sim \Delta B_1O_1C \Rightarrow \frac{AD}{B_1C_1} = \frac{O_1D}{O_1B_1} = \frac{7}{3}$; $\left.\begin{matrix} O_1D = 7m \\ O_1B_1 = 3m \end{matrix}\right\} \Rightarrow B_1D = 10m$

2.



$\alpha = (BC_1D)$?

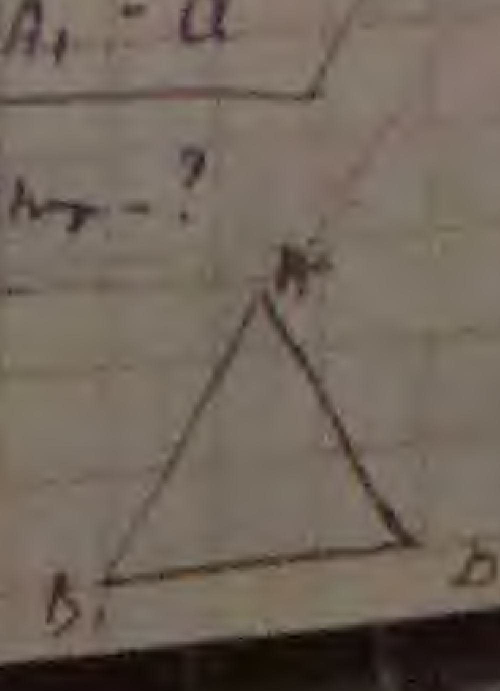
$\beta \supset A$, $\beta \parallel \alpha$

$AA_1 = a$

$S_{пр}$ - ?

$\left.\begin{matrix} BC_1 \parallel AD_1 \\ BD \parallel B_1D_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta \parallel \alpha$

$S_{AB_1D_1} =$

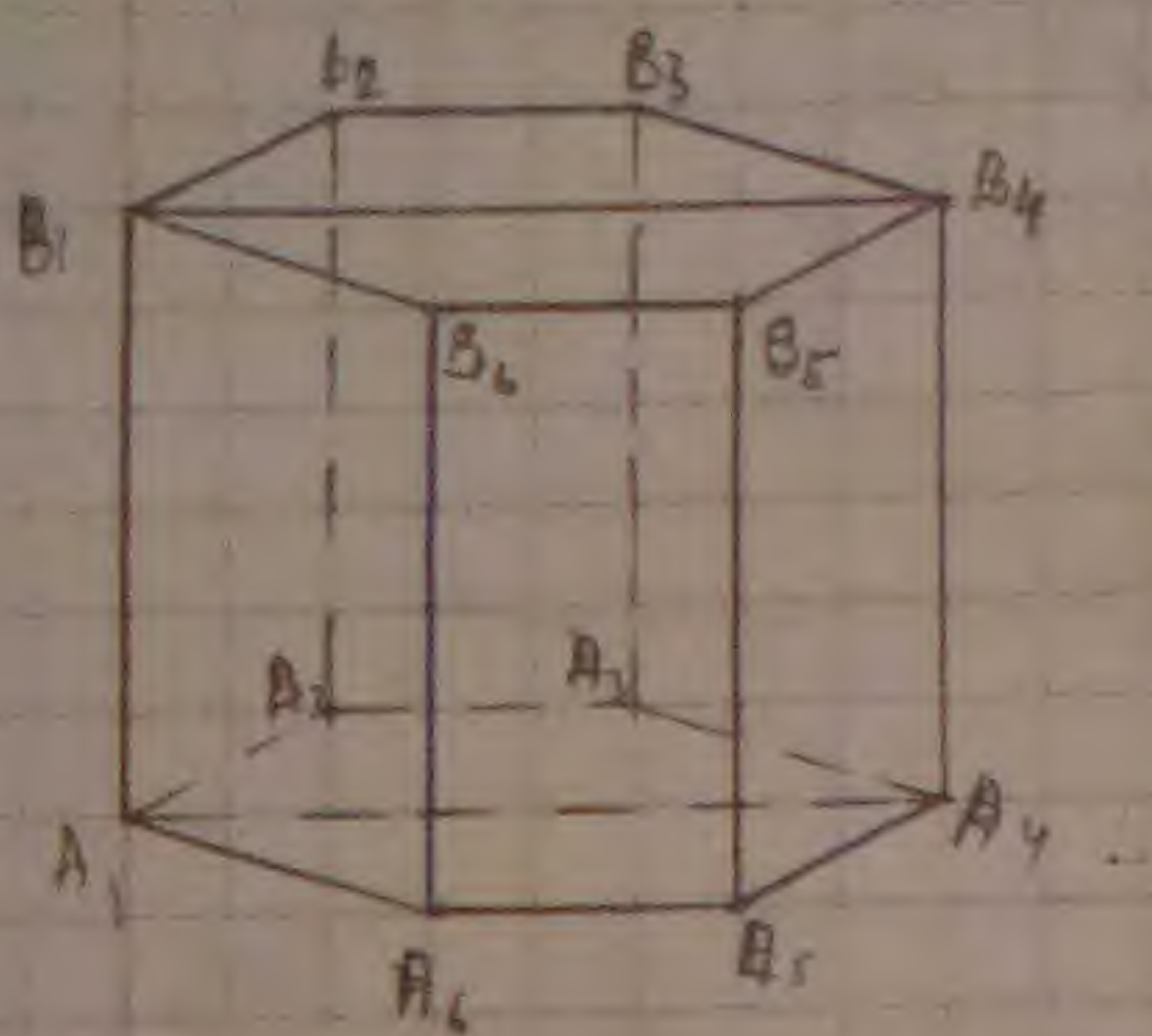


$D = AB_1 = AD_1 = a\sqrt{2}$

$B_1D_1 = a\sqrt{2}$

$S_{AB_1b_1} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$:

3



$S_{A_1B_1B_4A_4} = 4.$

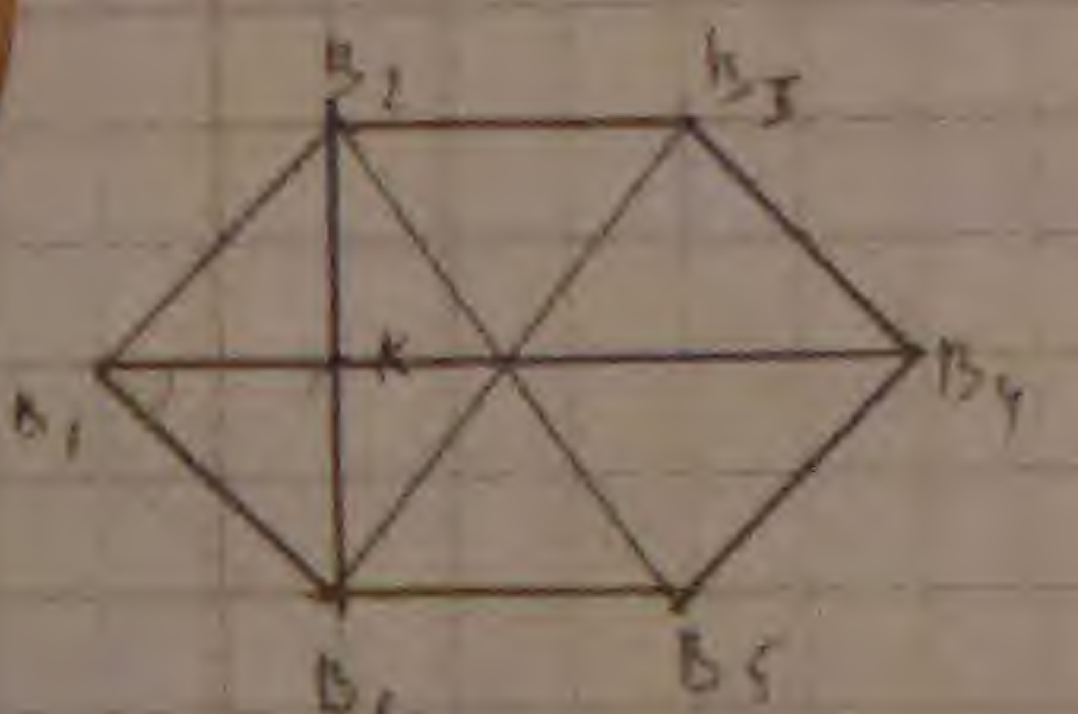
$B_6B_2 = 2$

$S_{m} - ?$

[illegible] $A_6B_1B_5A_5$ և $A_2B_2B_3A_3$ [illegible] [illegible]

$A_6B_1B_5A_5 \parallel A_2B_2B_3A_3$: $(B_1B_2B_3) \perp (A_1B_2B_3)$:

$\perp (A_6B_6B_5)$



$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = 180^\circ(n-2) \\ n = 6 \quad \alpha = 720 \\ \alpha_n = \frac{720}{6} = 120^\circ \end{array}}$

ΔB_1B_6K -ից. $B_1B_6 = \frac{KB_6}{\sin 60^\circ} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $4 = B_1B_4 \cdot B_1A_1$,

$B_1A_1 = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$B_1B_4 = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$S_h = 6 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 3$

$S_{լր} = S_կ + 2S_h$

$S_կ = P_h + A_1B_1 = 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 12$:

$S_{լր} = 6 + 12 = 18.$

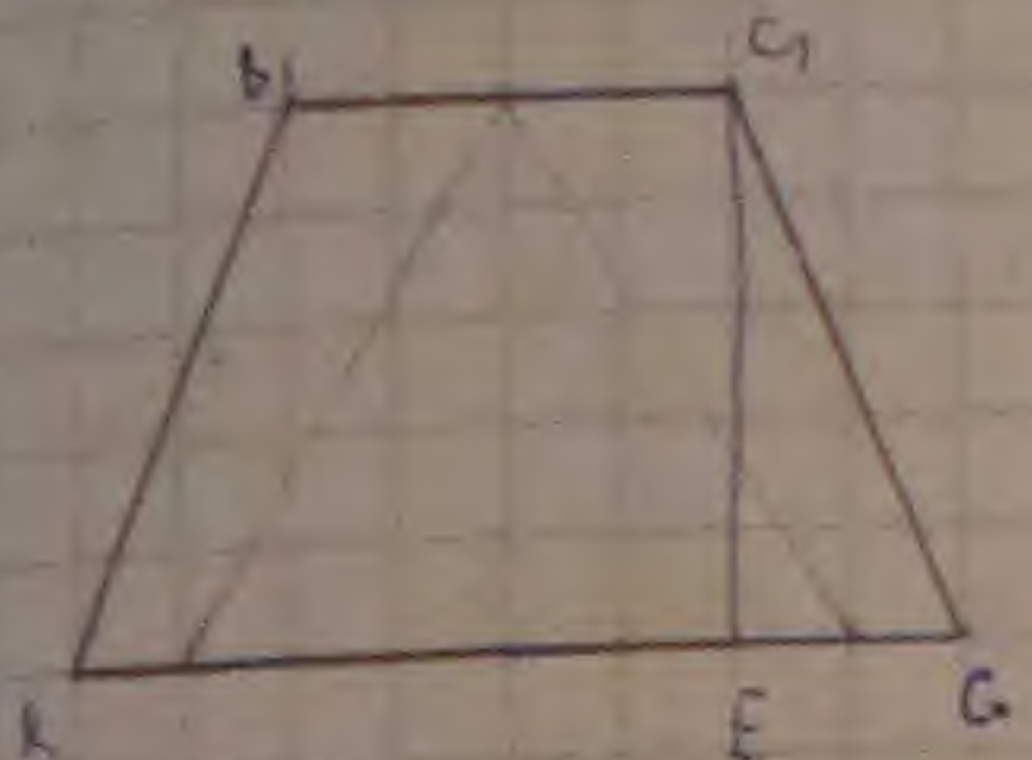
5.

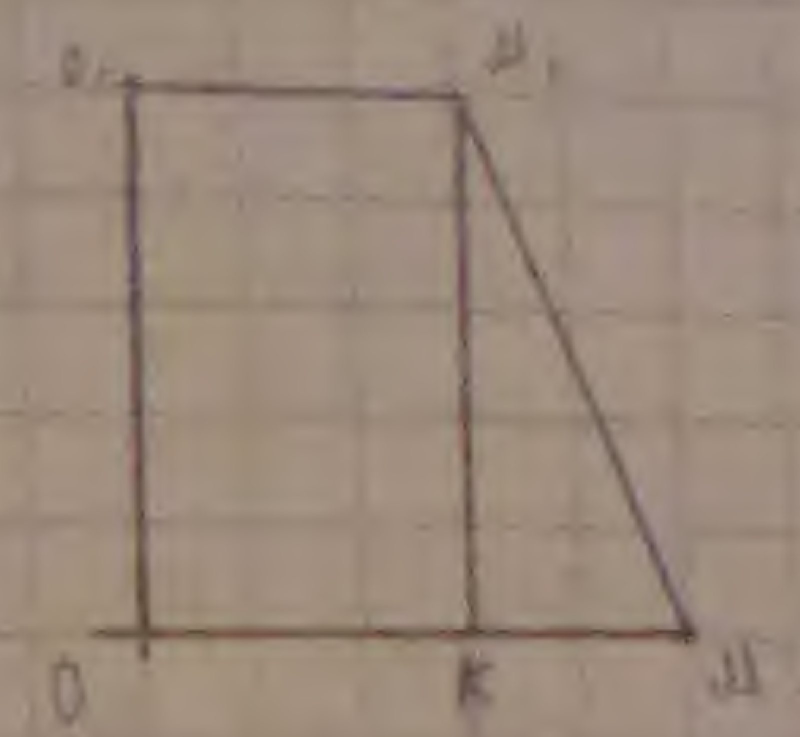
$AB = BC = AC = 8$

$A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = 5$

$OO_1 \perp (ABC)$, $OO_1 = 3$

$S_{կ.} - ?$





$OB = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$OM = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$O_1M_1 = \frac{2,5}{\sqrt{3}}$

$KM = \frac{1,5}{\sqrt{3}} \Rightarrow MM_1 = \sqrt{9 + \frac{9}{12}}$

$C_1E = MM_1$; $BC_1 = \sqrt{B_1C_1^2 + C_1E^2}$

181.

$S_{կողմ.} = 2\pi BC \cdot AB = 2\pi ab$

$S_{լրիվ} = 2\pi AB \cdot BC = 2\pi ab$

184. [illegible]

$h = 8$

$x - ?$

[illegible]

$r_1 = ?$

$S_1 = \pi r_1^2$

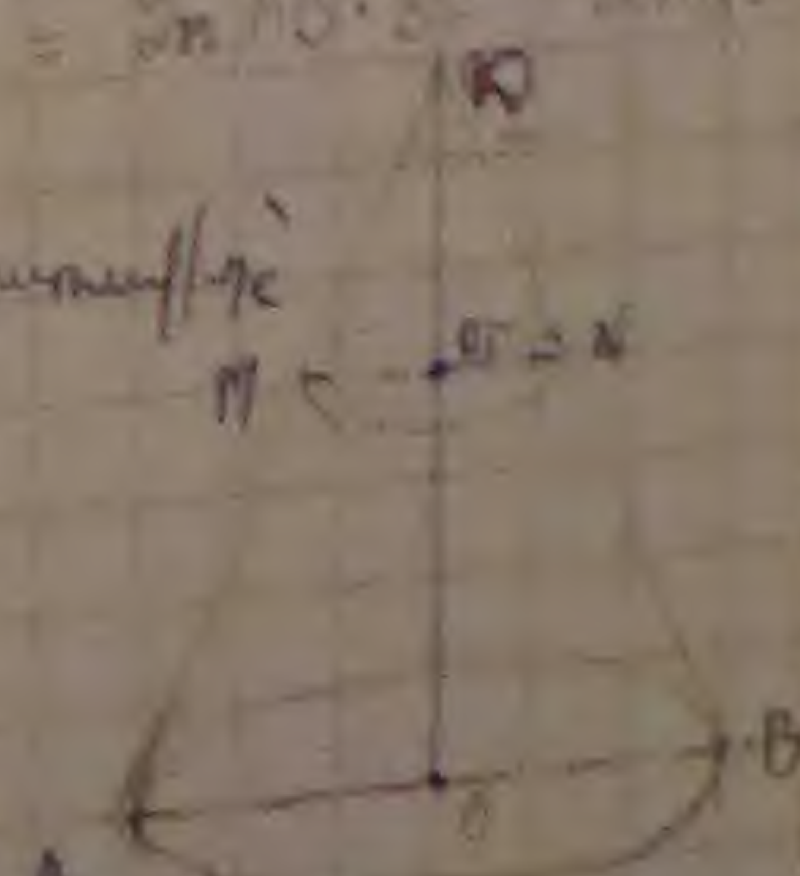
$S_2 = \pi r_2^2$

$S_1 = 2S_2 \Rightarrow \pi r_1^2 = 2\pi r_2^2$

$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{2}$

$\frac{MO_1}{AO} = \frac{DO_1}{DO_1} = \sqrt{2}$

$DO_1 = 8\sqrt{2}$ $4\sqrt{2}$



187. $SO = h$

$\alpha = 60$

$\angle [illegible] = 60°$

$AC = \frac{[illegible]}{[illegible]} = [illegible]$

$S_{\Delta ASC} = \frac{1}{2} [illegible] = [illegible]^2$

190. a)

ΔKbO [illegible] $= [illegible] = 10\sqrt{[illegible]}$

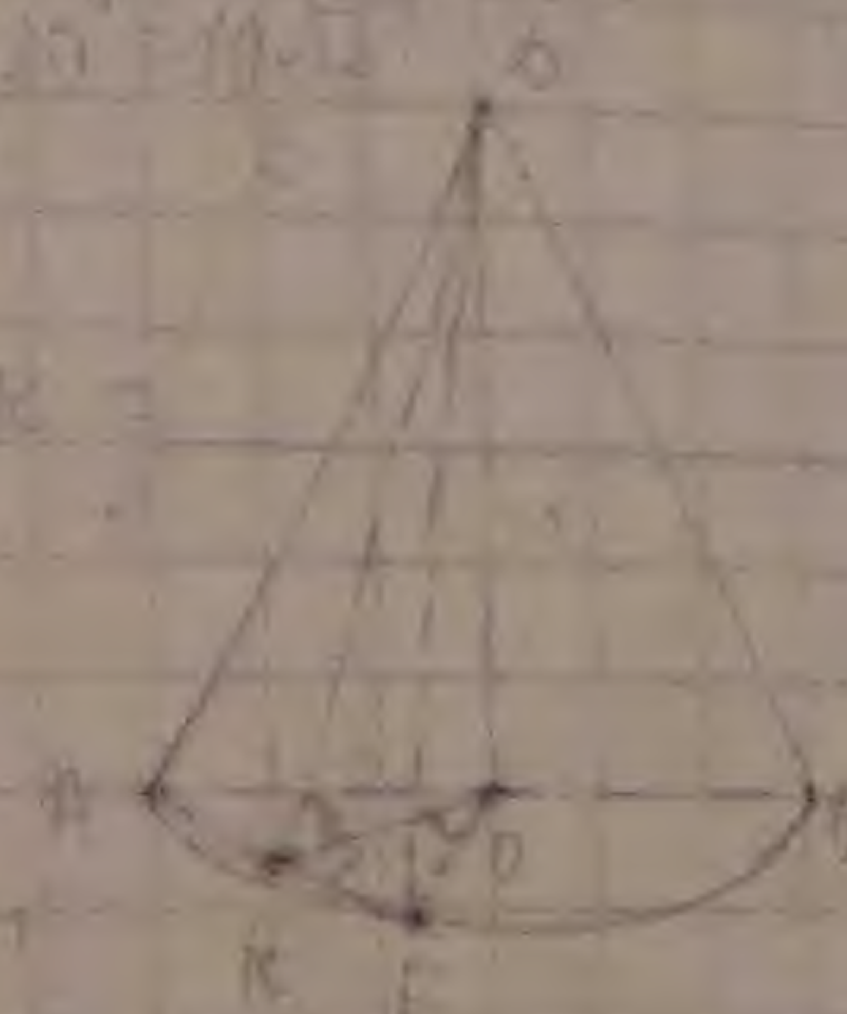
$Kb = \frac{10}{[illegible]}$

ΔAKF [illegible] $KF = [illegible] \cdot OK =$

$= \frac{10}{[illegible]} \Rightarrow AF = \frac{20}{3}$

$S = \frac{1}{2} AF \cdot bK =$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{20}{3} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} = \frac{200\sqrt{[illegible]}}{9}$



194

195 a) $\frac{\pi l}{180°} \cdot 90° = 2\pi r$

$\frac{\pi l}{2} = 2\pi r$

$l = 4r$

$\sin \beta = \frac{1}{4}$

$\beta = \arcsin \frac{1}{4}$

$2\beta = 2\arcsin \frac{1}{4}$

195 $AC = a$

$\angle ACB = \alpha$

$\angle SBA = \varphi$

$S_{п.}$

201

$r = m\cos\varphi$

$S = \pi r l + \pi r^2 = \pi \cdot m\cos\varphi \cdot m + \pi m^2\cos^2\varphi = \pi m^2\cos\varphi(1+\cos\varphi)$

$S_{бок} = \pi \cdot OB \cdot \ldots$

$S = 2\pi \cdot m \sin\varphi \cdot m = 2\pi m^2 \sin\varphi$

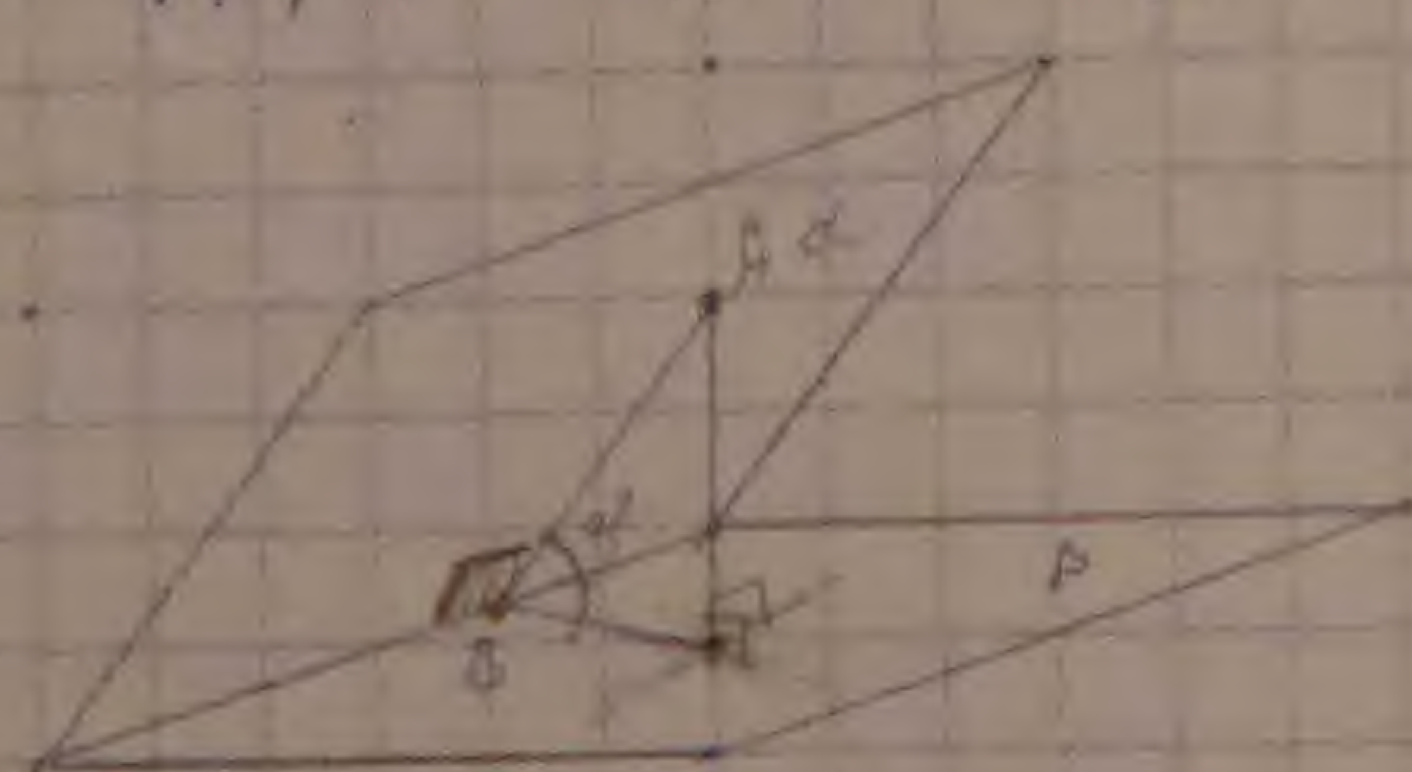
[illegible] $= 244$

$2\pi r = \frac{\pi l}{180^\circ} \cdot 90^\circ = \frac{\pi l}{2}$

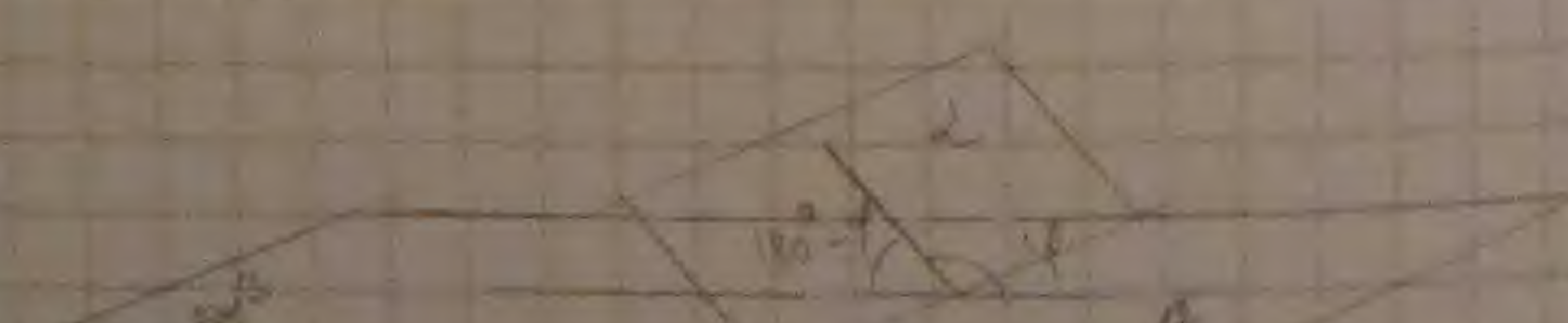
$r = \frac{l}{4}$

Д.З. | 226 - 250.

Երբ երկնիստ անկյան որևէ նիստի որևէ կետից մյուս նիս-
տին տարված է ուղղահայաց, և այդ նույն կետից I նիստի հարթու-
յան մեջ երկնիստ անկյան կողին տարված է ուղղահայաց, ապա
երկ. անկյան I նիստի վրայի կետով, կողը այդ կետով
տարված ուղղ-ուղղիղ՝ հատման կետը և II նիստի՝ I-ի
վրայից տարված ուղղահայացի հիմքով կազմված անկյունը
հանդիսանում է երկնիստ անկյան գծային անկյուն:



Երբ տրված են երկու երկնիստ անկյուններ որոնց մի նիստը ընդհանուր է, իսկ մյուս երկու նիստերը միևնույն հարթության կիսահարթություններ են, ապա այդ անկյունները կազմում են 180°-ի անկյուն




Тетрадь
96 листов
DAN MARK
PPU DAN MARK